2003年東大文$\boxed{4}$

(1)

$X_3 \neq 0$である確率を考える。サイコロの目とX_1を表にすると下の通り。

	1	2	3	4	5	6
X_1	0	1	2	1	2	5

$X_1 = 1$のとき　2以上の目が出れば$X_2 = 1$。さらに2以上の目が出れば$X_3 = 1$で、$X_3 \neq 0$。

$X_1 = 2$のとき　3以上の目が出れば$X_2 = 2$。さらに3以上の目が出れば$X_3 = 2$で、$X_3 \neq 0$。

$X_1 = 5$のとき　サイコロの目とX_2を表にすると下の通り。

	1	2	3	4	5	6
X_2	0	1	2	1	0	5

　$X_2 = 1$のとき　2以上の目が出れば$X_3 = 1$で、$X_3 \neq 0$。

　$X_2 = 2$のとき　3以上の目が出れば$X_3 = 2$で、$X_3 \neq 0$。

　$X_2 = 5$のとき　1か5以外の目が出れば$X_3 \neq 0$。

$X_3 \neq 0$である確率は　$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{25}{54}$

余事象により、$X_3 = 0$である確率は　$\therefore 1 - \frac{25}{54} = \frac{29}{54}$　……(答)

(2)

$X_{n+1} \leqq X_n$であるから、最初に6の目が出て$X_1 = 5$でなければならない。

以降、6の目が出続けるから、求める確率は　$\therefore \left(\frac{1}{6}\right)^n$　……(答)

(3)

ある$m \leqq n$において$X_m = 1$となり、以降2以上の目が出続ける。

$X_1 = 2$のとき　$m \geqq 2$において$X_m = 1$にはなり得ない。したがって$X_1 = 1, 5$に限られる。

$X_1 = 1$のとき　以降2以上の目が出続ければよいので、確率は　$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$X_1 = 5$のとき　ある$2 \leqq m \leqq n$において$X_m = 1$となり、$X_n = 1$である確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m} = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n \left(\frac{1}{5}\right)^m$$

これは$m = 1$とすれば$X_1 = 1$のときの確率に一致する。

したがって、求める確率は

$$2\left(\frac{5}{6}\right)^n \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^m = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$　……(答)