2003年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

$f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{3!}$ とすると　$f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$　$f''(x)=-\sin x+x$　$f'''(x)=-\cos x+1\geqq 0$

$f''(x)$ は単調増加であり、$f''(x)=0$ より、$x\geqq 0$ において $f''(x)\geqq 0$

$f'(x)$ は単調増加であり、$f'(x)=0$ より、$x\geqq 0$ において $f'(x)\geqq 0$

$f(x)$ は単調増加であり、$f(x)=0$ より、$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$　$\therefore x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq \sin x$

$g(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\sin x$ とすると　$g'(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}-\cos x$　$g''(x)=-x+\dfrac{x^3}{3!}+\sin x=f(x)$

$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ であるから、$g''(x)\geqq 0$

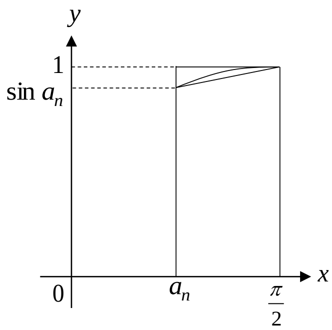
$g'(x)$ は単調増加であり、$g'(x)=0$ より、$x\geqq 0$ において $g'(x)\geqq 0$

$g(x)$ は単調増加であり、$g(x)=0$ より、$x\geqq 0$ において $g(x)\geqq 0$　$\therefore \sin x\leqq x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$

以上により、$x\geqq 0$ において　$\therefore x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq \sin x\leqq x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$　（証明終）

(2)

(a)



立体の体積は　$\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\dfrac{\pi}{2}\left[x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\dfrac{\pi^2}{2}$

この立体のうち、$a_n\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分の体積は　$\dfrac{\pi^2}{4n}$

高さ $\dfrac{\pi}{2}-a_n$、半径1である円柱の体積は　$\pi\left(\dfrac{\pi}{2}-a_n\right)$

直線 $x=a_n$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$、x 軸、2点 $(a_n,\sin a_n)$ と $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ を結ぶ線分で囲まれた台形を

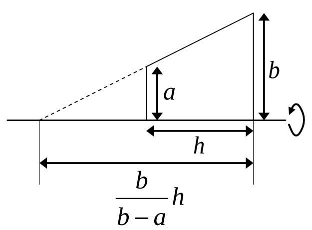
x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は　$\dfrac{1}{3}\pi(1+\sin a_n+\sin^2 a_n)\left(\dfrac{\pi}{2}-a_n\right)$

凸性より、これらの体積を比較すると

$$\frac{1}{3}\pi(1+\sin a_n+\sin^2 a_n)\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)<\frac{\pi^2}{4n}<\pi\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)\qquad \therefore \frac{\pi}{4}<n\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)<\frac{3\pi}{4(1+\sin a_n+\sin^2 a_n)}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\pi}{2}$ であるから、はさみうちの原理により　$\therefore \lim_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{2}-a_n\right)=\dfrac{\pi}{4}$　……(答)

※右図のような台形を回転軸のまわりに1回転してできる立体の体積は



$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi b^2\cdot\frac{b}{b-a}h-\frac{1}{3}\pi a^2\cdot\frac{a}{b-a}h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a}h=\frac{1}{3}\pi(b^2+ab+a^2)h$$

(b)

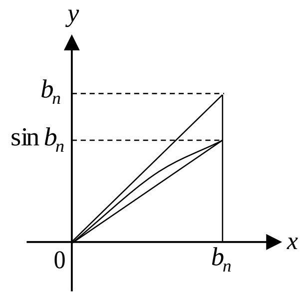
この立体のうち、$0 \leqq x \leqq b_n$ の部分の体積は　$\dfrac{\pi^2}{4n}$

直線 $x = b_n$ と $y = x$ 、x 軸で囲まれた三角形を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐の体積は　$\dfrac{1}{3}\pi {b_n}^3$

直線 $x = b_n$ と $y = \dfrac{\sin b_n}{b_n} x$ 、x 軸で囲まれた三角形を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐の体積は

$\dfrac{1}{3}\pi b_n \sin^2 b_n$ であるが、(1) より　$\dfrac{1}{3}\pi b_n \sin^2 b_n > \dfrac{1}{3}\pi b_n \left(b_n - \dfrac{{b_n}^3}{6} \right)^2 = \dfrac{1}{3}\pi {b_n}^3 \left(1 - \dfrac{{b_n}^2}{6} \right)^2$

凸性より、これらの体積を比較すると



$$\frac{1}{3}\pi {b_n}^3 \left(1 - \frac{{b_n}^2}{6} \right)^2 < \frac{\pi^2}{4n} < \frac{1}{3}\pi {b_n}^3 \qquad \frac{3\pi}{4n} < {b_n}^3 < \frac{3\pi}{4n\left(1 - {b_n}^2/6\right)^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4n}} < b_n < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4n\left(1 - {b_n}^2/6\right)^2}} \qquad \therefore \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}\, n^{p-\frac{1}{3}} < n^p b_n < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4\left(1 - {b_n}^2/6\right)^2}}\, n^{p-\frac{1}{3}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ であり、$p - \dfrac{1}{3} > 0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-\frac{1}{3}} = \infty$ であるから $\lim\limits_{n\to\infty} n^p b_n = \infty$

$p - \dfrac{1}{3} < 0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-\frac{1}{3}} = 0$ であるから $\lim\limits_{n\to\infty} n^p b_n = 0$

したがって、$\lim\limits_{n\to\infty} n^p b_n$ が 0 でない有限な値に収束するとき $p = \dfrac{1}{3}$、そのときの極限値は $\sqrt[3]{\dfrac{3\pi}{4}}$ ……(答)