2003 年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)

l についての数学的帰納法で示す。$l=1$ のとき、$A=1,\ B=-[\sqrt{p}]$ とすれば成立。

$l=k$ のとき、$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^k=A\sqrt{p}+B$ となる整数 A,B が存在すると仮定すると

$$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^{k+1}=(A\sqrt{p}+B)(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])=(-A[\sqrt{p}]+B)\sqrt{p}+Ap-B[\sqrt{p}]$$

$-A[\sqrt{p}]+B,\ Ap-B[\sqrt{p}]$ は共に整数であるから、$l=k+1$ でも成立。以上により示された。(証明終)

(2)

$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^l=A_l\sqrt{p}+B_l$ とすると、(1) より $\begin{cases} A_{l+1}=-[\sqrt{p}]A_l+B_l \\ B_{l+1}=pA_l-[\sqrt{p}]B_l \end{cases}$

$$A_{l+2}=-[\sqrt{p}]A_{l+1}+B_{l+1}=-[\sqrt{p}](-[\sqrt{p}]A_l+B_l)+pA_l-[\sqrt{p}]B_l=(p+[\sqrt{p}]^2)A_l-2[\sqrt{p}]B_l$$

$$B_{l+2}=pA_{l+1}-[\sqrt{p}]B_{l+1}=p(-[\sqrt{p}]A_l+B_l)-[\sqrt{p}](pA_l-[\sqrt{p}]B_l)=-2p[\sqrt{p}]A_l+(p+[\sqrt{p}]^2)B_l$$

$A_1=1>0,\ B_1=-[\sqrt{p}]<0$ であるから、$0<A_1<A_3,\ B_3<B_1<0$ であることは明らかで、

以下帰納的に、$0<A_1<A_3<A_5<\cdots<A_{2k-1}<\cdots,\ 0>B_1>B_3>B_5>\cdots>B_{2k-1}>\cdots$ がわかる。
このように順次得られる数列 $\{A_{2k-1}\},\ \{B_{2k-1}\}$ によって、格子点 $Q_k(A_{2k-1},\ -B_{2k-1})$ を定義すると、

$A_{2k-1}\sqrt{p}+B_{2k-1}=(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^{2k-1}$ と表せるから、Q_k と直線 $y=\sqrt{p}x$ の距離 d_k は

$$\therefore d_k=\frac{\left|A_{2k-1}\sqrt{p}+B_{2k-1}\right|}{\sqrt{p+1}}=\frac{(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^{2k-1}}{\sqrt{p+1}}$$

$0<\sqrt{p}-[\sqrt{p}]<1$ であるから、k を大きくするほど A_{2k-1} は大きくなり、d_k は小さくなる。

したがって、$A_{2k-1}>N$ かつ $d_k<\dfrac{1}{N}$ となる k が必ず存在するから、題意を満たす格子点が存在する。(証明終)

(3)

双曲線 $y^2-px^2=q$ の漸近線は、$y=\pm\sqrt{p}x$ で与えられる。

第 1 象限で考える。(2) より、任意の自然数 N について、x 座標が N より大きく、直線 $y=\sqrt{p}x$ との距離が $\dfrac{1}{N}$ より小さい第 1 象限内の格子点 Q_k が存在する。Q_k と x 座標が等しい、双曲線 $y^2-px^2=q$ 上の点を P_k、直線 $y=\sqrt{p}x$ 上の点 R_k とする。

このとき、$Q_kR_k=\sqrt{p+1}\,d_k$ であり、k を大きくするほど d_k は小さくなるから、Q_kR_k は小さくなる。

一方、$P_kR_k=\left|\sqrt{pA_{2k-1}{}^2+q}-\sqrt{p}A_{2k-1}\right|=\left|\dfrac{q}{\sqrt{pA_{2k-1}{}^2+q}+\sqrt{p}A_{2k-1}}\right|$ より、k を大きくするほど P_kR_k は小さくなる。

$P_kQ_k\leqq P_kR_k+Q_kR_k$ より、k を大きくするほど P_kQ_k も小さくなるのは明らかである。

したがって、$P_kQ_k<\dfrac{1}{M}$ となる k が必ず存在するから、題意を満たす格子点が存在する。（証明終）

(4)

(2) で定義した格子点の列 $Q_k(A_{2k-1},\,-B_{2k-1})$ について、

$$Q_kR_k=\sqrt{6}\,d_k=(\sqrt{5}-2)^{2k-1}<\left(\frac{1}{4}\right)^{2k-1}\qquad P_kR_k=\left|\sqrt{5A_{2k-1}{}^2+2}-\sqrt{5}A_{2k-1}\right|=\frac{2}{\sqrt{5A_{2k-1}{}^2+2}+\sqrt{5}A_{2k-1}}<\frac{1}{\sqrt{5}A_{2k-1}}$$

$$\therefore P_kQ_k\leqq P_kR_k+Q_kR_k<\frac{1}{2^{4k-2}}+\frac{1}{\sqrt{5}A_{2k-1}}$$

ここで、$A_1=1,\ B_1=-2$ より、

$$A_3=9A_1-4B_1=17,\ B_3=-20A_1+9B_1=-38\qquad A_5=9A_3-4B_3=305,\ B_5=-20A_3+9B_3=-682$$

$$P_3Q_3<\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{\sqrt{5}A_5}=\frac{1}{1024}+\frac{1}{305\sqrt{5}}<\frac{1}{1000}+\frac{1}{500}=\frac{3}{1000}\qquad\therefore P_3Q_3<\frac{1}{100}$$

したがって、(305, 682) は題意を満たす格子点の 1 つである。……(答)

（注）

(2) において、l が奇数のとき $A_l>0,\ B_l<0$、l が偶数のとき $A_l<0,\ B_l>0$ となる。

考えやすいように l は奇数に限定して解答した。(4) は題意を満たす格子点をいずれか 1 つ求めればよいので、問題ない。