2003年東大理後期$\boxed{3}$

(1)

与えられた漸化式より　$x_{n+2}=a_{n+1}x_{n+1}-x_n$

$x_0=0$ より　$x_2=a_1x_1$　$x_3=a_2x_2-x_1=(a_1a_2-1)x_1$　$x_4=a_3x_3-x_2=(a_1a_2a_3-a_3-a_1)x_1$

$n \geqq 1$ のとき $x_n=p_nx_1$ と表せることがわかり、数列 $\{p_n\}$ について、次の漸化式が成り立つ。

$$p_{n+2}=a_{n+1}p_{n+1}-p_n$$

今、$p_{k+1}>p_k>0$ と仮定すると、$a_n \geqq 2$ より

$$p_{k+2}=a_{k+1}p_{k+1}-p_k \geqq 2p_{k+1}-p_k=p_{k+1}+(p_{k+1}-p_k)>p_{k+1} \quad \therefore p_{k+2}>p_{k+1}>p_k>0$$

$p_1=1,\ p_2=a_1$ であるから $p_2>p_1>0$ であり、$p_3>p_2>p_1>0$ がわかる。

以下帰納的に、$0<p_1<p_2<p_3<\cdots<p_n<\cdots$　が成立することがわかる。

$x_m=p_mx_1=1$ とすると、$x_1=\dfrac{1}{p_m}$ と定まるから、$x_n=\dfrac{p_n}{p_m}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ がただ一つに定まる。

$0<p_1<p_2<\cdots<p_{m-1}<p_m$ より　$\therefore 0<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<1$

したがって、題意を満たす数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在する。（証明終）

(2)

与えられた漸化式より　$y_{n+2}=a_{n+1}y_{n+1}-by_n$

(1)同様に $y_n=q_ny_1$ と表せることがわかり、数列 $\{q_n\}$ について、次の漸化式が成り立つ。

$$q_{n+2}=a_{n+1}q_{n+1}-bq_n$$

今、$q_{k+1}>q_k>0$ と仮定すると、$a_n \geqq 1+b$ より

$$q_{k+2}=a_{k+1}q_{k+1}-bq_k \geqq (1+b)q_{k+1}-bq_k=q_{k+1}+b(q_{k+1}-q_k)>q_{k+1} \quad \therefore q_{k+2}>q_{k+1}>q_k>0$$

$q_1=1,\ q_2=a_1$ であるから $q_2>q_1>0$。

以下、(1)同様に $0<q_1<q_2<\cdots<q_{m-1}<q_m$ が成立するので、$y_1=\dfrac{1}{q_m}$ と定めれば、

題意を満たす数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在する。（証明終）

(3)

(1)において、$p_{k+1}>p_k>0$ と仮定し、$a_n \geqq c>2$ とすると

$$p_{k+2}=a_{k+1}p_{k+1}-p_k \geqq cp_{k+1}-p_k=(c-1)p_{k+1}+(p_{k+1}-p_k)>(c-1)p_{k+1} \quad \therefore p_{k+2}>(c-1)p_{k+1}$$

$p_1=1,\ p_2=a_1$ であるから　$p_2 \geqq c>c-1=(c-1)p_1$

したがって、$n \geqq 1$ において　$p_{n+1}>(c-1)p_n$　$\therefore p_n<\dfrac{1}{c-1}p_{n+1}$

$$p_n<\frac{1}{c-1}p_{n+1}<\left(\frac{1}{c-1}\right)^2 p_{n+2}<\cdots<\left(\frac{1}{c-1}\right)^{m-n} p_m \quad \therefore x_n=\frac{p_n}{p_m}<\left(\frac{1}{c-1}\right)^{m-n} \quad (1 \leqq n \leqq m-1)$$

$c>2$ より $0<\dfrac{1}{c-1}<1$ であるから、$r=\dfrac{1}{c-1}$ とすれば題意は満たされた。（証明終）