2003年東大理$\boxed{1}$

$f(x)=ax^2+bx+c$　　$f(-1)=a-b+c=-1$　　$f(1)=a+b+c=1$　　$\therefore b=1,\ c=-a$

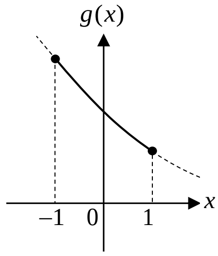
これより　$3x^2-1-f(x)=3x^2-1-(ax^2+x-a)=(3-a)x^2-x+a-1$

$g(x)=(3-a)x^2-x+a-1$とおくと　$g(-1)=2+1=3>0$　　$g(1)=2-1=1>0$

$-1\leqq x\leqq 1$において$g(x)\geqq 0$となる条件を考える。

$a=3$のとき　$g(x)=-x+2$　$1\leqq g(x)\leqq 3$であるから、$g(x)\geqq 0$が成立。

$a\neq 3$のとき　$g(x)=(3-a)\left\{x-\dfrac{1}{2(3-a)}\right\}^2-\dfrac{1}{4(3-a)}+a-1$



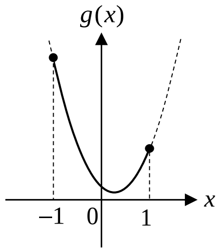
$a<3$のとき下に凸であり、軸$\dfrac{1}{2(3-a)}>0$

$\dfrac{1}{2(3-a)}>1$　$3-a<\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{5}{2}<a<3$であれば、$g(x)>0$が成立。

$\dfrac{1}{2(3-a)}\leqq 1$　$a\leqq\dfrac{5}{2}$のとき　$-\dfrac{1}{4(3-a)}+a-1\geqq 0$であればよく、

$-1+4(a-1)(3-a)\geqq 0$　　$4a^2-16a+13\leqq 0$

$4\left\{a-\left(2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{a-\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\leqq 0$　　$\therefore 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$



$a>3$のとき上に凸であり、必ず$g(x)>0$が成立する。

以上により、$-1\leqq x\leqq 1$において$g(x)\geqq 0$となる条件は　$\therefore a\geqq 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x)=2ax+1$より　$\{f'(x)\}^2=4ax^2+4ax+1$

奇数次の項は除いてよいから　$\therefore I=2\displaystyle\int_0^1(4a^2x^2+1)dx=2\left[\dfrac{4}{3}a^2x^3+x\right]_0^1=\dfrac{8}{3}a^2+2$

$a\geqq 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$のとき、$I$は単調増加であるから、$I$の最小値は　$\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{19}{4}-2\sqrt{3}\right)+2=\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}$

$\therefore I\geqq\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}$　……(答)