2003年東大理$\boxed{2}$

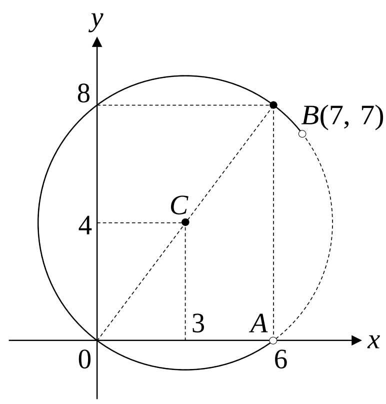
(1)

実軸を x 軸、虚軸を y 軸とする。 $A(6,\ 0)$ は x 軸上、 $B(7,\ 7)$ は直線 $y=x$ 上にある。

$t=3$ とすると、 $P(0,\ 0)$ であり、 $\angle APB=\dfrac{\pi}{4}$ である。 $\angle APB$ は t によらず一定と仮定する。

$t\to 0$ のとき $P\to(6,\ 0)$、 $t=7$ のとき $P(0,\ 8)$ であり、円周角の定理から、 P は円 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 上を動くと予想できる。 $C(3,\ 4)$ とすると

$$\left|\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}-(3+4i)\right|$$
$$=\left|\frac{14(t-3)-(3+4i)\{(t-7)-ti\}}{(t-7)-ti}\right|=\left|\frac{14(t-3)-\{3(t-7)+4t-3ti+4(t-7)i\}}{(t-7)-ti}\right|$$
$$=\left|\frac{14(t-3)-\{7(t-3)+(t-28)i\}}{(t-7)-ti}\right|=\left|\frac{7(t-3)-(t-28)i}{(t-7)-ti}\right|$$
$$=\sqrt{\frac{49(t-3)^2+(t-28)^2}{(t-7)^2+t^2}}=\sqrt{\frac{49(t^2-6t+9)+(t^2-56t+16\cdot 49)}{2t^2-14t+49}}$$
$$=\sqrt{\frac{50t^2-350t+25\cdot 49}{2t^2-14t+49}}=\sqrt{\frac{25(2t^2-14t+49)}{2t^2-14t+49}}=5$$



$2t^2-14t+49=(t-7)^2+t^2\neq 0$ であり、 t によらず $CP=5$ で、一定。

$t\to\infty$ のとき $\dfrac{14\left(1-\dfrac{3}{t}\right)}{1-i-\dfrac{7}{t}}\to\dfrac{14}{1-i}=7+7i$ であるから、 P は B に近づく。

P は線分 AB から見て左側を動くから、円周角の定理より　 $\therefore \angle APB=\dfrac{\pi}{4}$ ……(答)

(2)

(解答 1)

円 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ は $O(0,\ 0)$ を通る。 OP が最大になるのは OP が円の直径に一致するときで、このとき $OP=10$ であるから

$$\left|\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}\right|^2=\frac{196(t-3)^2}{2t^2-14t+49}=100 \qquad 49(t^2-6t+9)=25(2t^2-14t+49)$$
$$t^2-56t+16\cdot 49=0 \qquad (t-28)^2=0 \qquad \therefore t=28 \text{ ……(答)}$$

(解答 2)

$P(6,\ 8)$ であるから　 $\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i$ 　 $14(t-3)=(6+8i)\{(t-7)-ti\}=14(t-3)+2(t-28)i$

$$2(t-28)i=0 \qquad \therefore t=28 \text{ ……(答)}$$

※(1)は、 $\angle APB$ は t によらず一定であると予想し、円の軌跡から逆算してみた。王道の解答ではないだろう。