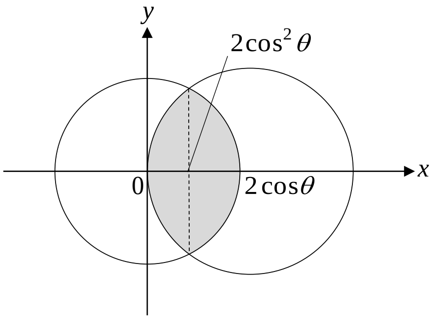
2003 年東大理$\boxed{3}$

(1)

平面 $z=t\,(0\leqq t\leqq 1)$ による円錐 A の断面は、半径 $2(1-t)$ の円である。

$t=1-\cos\theta$ のとき、$2(1-t)=2\cos\theta$ であるから、

$z=1-\cos\theta$ による C の断面は、$(x-1)^2+y^2\leqq 1,\ x^2+y^2\leqq 4\cos^2\theta$ で表される。



円 $(x-1)^2+y^2=1$ と円 $x^2+y^2=4\cos^2\theta$ の交点を求めると

$$x^2-2x+y^2=4\cos^2\theta-2x=0 \qquad \therefore x=2\cos^2\theta$$

これより　$S(t)=2\int_{2\cos^2\theta}^{2\cos\theta}\sqrt{4\cos^2\theta-x^2}\,dx+2\int_0^{2\cos^2\theta}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

$x\geqq 2\cos^2\theta$ の部分 $2\int_{2\cos^2\theta}^{2\cos\theta}\sqrt{4\cos^2\theta-x^2}\,dx$ について

$x=2\cos\theta\cos u$ とおくと　$dx=-2\cos\theta\sin u$　$\begin{array}{c|c} x & 2\cos^2\theta\to 2\cos\theta \\ \hline u & \theta\ \to\ 0 \end{array}$

$$\begin{aligned}
2\int_{2\cos^2\theta}^{2\cos\theta}\sqrt{4\cos^2\theta-x^2}\,dx&=2\int_\theta^0\sqrt{4\cos^2\theta(1-\cos u^2)}\cdot(-2\cos\theta\sin u\,du)=8\cos^2\theta\int_0^\theta\sin^2 u\,du\\
&=4\cos^2\theta\int_0^\theta(1-\cos 2u)\,du=4\cos^2\theta\left[u-\frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^\theta=2\cos^2\theta(2\theta-\sin 2\theta)\\
&=(1+\cos 2\theta)(2\theta-\sin 2\theta)=2\theta-\sin 2\theta+2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta\cos 2\theta\\
&=2\theta-\sin 2\theta+2\theta\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta
\end{aligned}$$

$x\leqq 2\cos^2\theta$ の部分 $2\int_0^{2\cos^2\theta}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$ について

$$2\int_0^{2\cos^2\theta}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=2\int_{-1}^{2\cos^2\theta-1}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_{-1}^{\cos 2\theta}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x=\cos u$ とおくと　$dx=-\sin u$　$\begin{array}{c|c} x & -1\to\cos 2\theta \\ \hline u & \pi\ \to\ 2\theta \end{array}$

$$\begin{aligned}
2\int_{-1}^{\cos 2\theta}\sqrt{1-x^2}\,dx&=2\int_\pi^{2\theta}\sqrt{1-\cos u^2}\cdot(-\sin u\,du)=2\int_{2\theta}^{\pi}\sin^2 u\,du\\
&=\int_{2\theta}^{\pi}(1-\cos 2u)\,du=\left[u-\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{2\theta}^{\pi}=\pi-2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta
\end{aligned}$$

以上により

$$\therefore S(t)=2\theta-\sin 2\theta+2\theta\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta+\pi-2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta=\pi-\sin 2\theta+2\theta\cos 2\theta$$ ……(答)

(2)

$t=1-\cos\theta$ とおくと　$dt=\sin\theta\,d\theta$　$\begin{array}{c|c} t & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{2} \end{array}$

$$\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-\sin 2\theta+2\theta\cos 2\theta)\sin\theta\,d\theta=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\sin 2\theta\,d\theta+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\cos 2\theta\,d\theta$$

ここで　$\sin\theta\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}(\cos\theta-\cos 3\theta),\ \sin\theta\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}(\sin 3\theta-\sin\theta)$

$$\therefore \int_0^1 S(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\pi\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 3\theta+\theta(\sin 3\theta-\sin\theta)\right\}d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\pi\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 3\theta\right)d\theta=\left[-\pi\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{6}\sin 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\pi=\pi-\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\sin 3\theta-\sin\theta)d\theta=\left[\theta\left(-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{9}\sin 3\theta-\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{9}-1=-\frac{10}{9}$$

$$\therefore \int_0^1 S(t)dt=\pi-\frac{2}{3}-\frac{10}{9}=\pi-\frac{16}{9}$$ ……(答)

※1994 年理系 $\boxed{3}$ に類似。