2003 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$

$s_1=\alpha+\beta=4$ ……(答)　$s_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+2=18$ ……(答)

$s_3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64+12=76$ ……(答)

また、$n\geqq 3$ のとき $s_{n-1}=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ より

$(\alpha+\beta)s_{n-1}=4s_{n-1}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})=(\alpha^n+\beta^n)+\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=s_n-s_{n-2}$

$\therefore s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$ ……(答)

(2)

$\beta=2-\sqrt{5}$ であるから　$-1<\beta<0$　$\therefore -1<\beta^3<0$　β^3 以下の最大の整数は -1 ……(答)

(3)

$s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$ より　$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$

(1)より、$n\geqq 3$ のとき $s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$ であるから、$s_{n-1},\ s_{n-2}$ が正の整数であれば s_n も正の整数である。

$s_1=4,\ s_2=18$ であるから、以下帰納的に s_n は正の整数であることがわかる。

$0<-\beta^{2003}<1$ であるから、α^{2003} 以下の最大の整数は s_{2003} である。

s_n の 1 の位の数を調べる。$s_{n-1},\ s_{n-2}$ の 1 の位の数をそれぞれ $t_{n-1},\ t_{n-2}$ とすると、

t_n は $4t_{n-1}+t_{n-2}$ を 10 で割った余りであるから

$t_1=4,\ t_2=8$　$4t_2+t_1=36$　$\therefore t_3=6$　$4t_3+t_2=32$　$\therefore t_4=2$　$4t_4+t_3=14$　$\therefore t_5=4$

$4t_5+t_4=18$　$\therefore t_6=8$

したがって、t_n は $4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ \cdots$ の繰り返しとなる。

$m\geqq 1$ のとき　$\therefore t_{4m-3}=4,\ t_{4m-2}=8,\ t_{4m-1}=6,\ t_{4m}=2$

$2003=4\times 501-1$ より　$\therefore t_{2003}=6$　求める数は 6 ……(答)