2003年東大理 $\boxed{5}$

(1)

X_n が 5 で割り切れないのは、n 回中 1 回も 5 の目が出ないときであるから、余事象より

$$\therefore 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

X_n が 4 で割り切れないのは、n 回とも奇数の目が出るか、n 回中 1 回だけ 2 か 6 の目が出てその他は奇数の目が出たときであるから、余事象より

$$\therefore 1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_nC_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots(答)$$

(3)

X_n が 5 でも 4 でも割り切れない確率を考える。n 回とも 1 か 3 の目が出るか、n 回中 1 回だけ 2 か 6 の目が出てその他は 1 か 3 の目が出たときであるから

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{1}{3}\right)^n=(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$1-p_n$ は X_n が 5 または 4 で割り切れない確率に等しいから

$$1-p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$$\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}-\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$n\to\infty$ のとき、$\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n\to 0$、$(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0$ であるから　$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}$ $\cdots\cdots$(答)

(注)

$0<r<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ を断りなく用いた。