

2003 年東大理 6

半径 1 の円に内接する正八角形を考える。

$$\text{正八角形の 8 辺の長さの和は } 8 \times 2 \sin \frac{\pi}{8} = 16 \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{これは円周 } 2\pi \text{ より小さいから } 2\pi > 16 \sin \frac{\pi}{8} \quad \therefore \pi > 8 \sin \frac{\pi}{8}$$

$$8 \sin \frac{\pi}{8} > 3.05 \text{ を示す。 } 64 \sin^2 \frac{\pi}{8} = 32 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) = 16(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{ここで } 1.414^2 = 1.999396 \quad 1.415^2 = 2.002225 \quad \therefore 1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

$$16 \times 0.585 < 64 \sin^2 \frac{\pi}{8} < 16 \times 0.586 \quad \therefore 9.36 < 64 \sin^2 \frac{\pi}{8} < 9.376$$

$$3.05^2 = 9.3025 \text{ より } \therefore 8 \sin \frac{\pi}{8} > 3.05 \quad \text{以上により、} \pi > 3.05 \text{ が示された。 (証明終)}$$

