2004年東大文 $\boxed{2}$

$y=x^2$ と $y=-2x^2+3ax+6a^2$ の交点を求める。 $x^2=-2x^2+3ax+6a^2$ とすると

$3x^2-3ax-6a^2=3(x+a)(x-2a)=0 \quad \therefore x=-a,\ 2a$

$a>0$ であるから、必ず 2 つの交点 $(-a,\ a^2),\ (2a,\ 4a^2)$ が存在する。

また、 $-2x^2+3ax+6a^2=-2\left(x-\dfrac{3}{4}a\right)^2+\dfrac{57}{8}a^2$ より $\quad \therefore -a<0<\dfrac{3}{4}a<2a$

$y=x^2$ と $x+y=k$ が接するとき $\quad x^2=k-x \quad x^2+x-k=0$ が重解を持つので $\quad D=1+4k=0 \quad \therefore k=-\dfrac{1}{4}$

このとき $\quad x^2+x+\dfrac{1}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0 \quad \therefore x=-\dfrac{1}{2}$

$y=-2x^2+3ax+6a^2$ と $x+y=k$ が接するとき $\quad -2x^2+3ax+6a^2=k-x$

$2x^2-(3a+1)x-6a^2+k=0$ が重解を持つので

$D=(3a+1)^2+8(6a^2-k)=0 \quad 8k=9a^2+6a+1+48a^2=57a^2-6a+1 \quad \therefore k=\dfrac{57}{8}a^2+\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{8}$

このとき $\quad 2x^2-(3a+1)x+\dfrac{9}{8}a^2+\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{8}=2\left\{x^2-\dfrac{3a+1}{2}x+\dfrac{(3a+1)^2}{16}\right\}=2\left(x-\dfrac{3a+1}{4}\right)^2 \quad \therefore x=\dfrac{3a+1}{4}$

$2a \geqq \dfrac{3a+1}{4}$ とすると $\quad 8a \geqq 3a+1 \quad \therefore a \geqq \dfrac{1}{5}$

これらにより、 $y=k-x$ の切片 k について

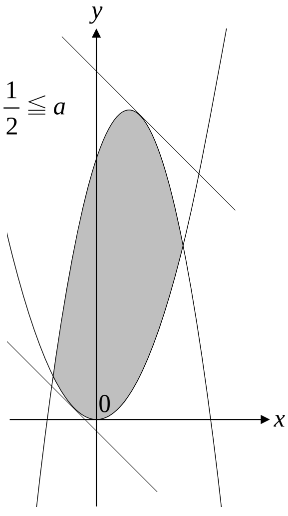
$0<a<\dfrac{1}{5}$ のとき　最大になるのは点 $(2a,\ 4a^2)$ を通るとき。最小になるのは点 $(-a,\ a^2)$ を通るとき。

$\dfrac{1}{5} \leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき　最大になるのは $y=-2x^2+3ax+6a^2$ に接するとき。最小になるのは点 $(-a,\ a^2)$ を通るとき。

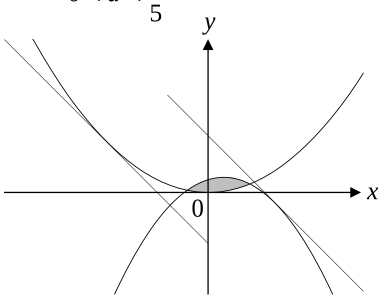
$\dfrac{1}{2} \leqq a$ のとき　最大になるのは $y=-2x^2+3ax+6a^2$ に接するとき。最小になるのは $y=x^2$ に接するとき。

$$\therefore \begin{cases} 0<a<\dfrac{1}{5} \text{のとき} & \text{最大値 } 4a^2+2a & \text{最小値 } a^2-a \\ \dfrac{1}{5} \leqq a<\dfrac{1}{2} \text{のとき} & \text{最大値 } \dfrac{57}{8}a^2+\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{8} & \text{最小値 } a^2-a \\ \dfrac{1}{2} \leqq a \text{のとき} & \text{最大値 } \dfrac{57}{8}a^2+\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{8} & \text{最小値 } -\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\dfrac{1}{2} \leqq a$



$0<a<\dfrac{1}{5}$



$\dfrac{1}{5} \leqq a<\dfrac{1}{2}$