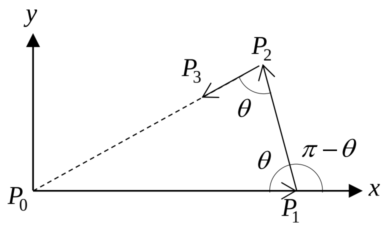
2004年東大理後期$\boxed{1}$



(1)

条件より、△$P_0P_1P_2$は二等辺三角形であり、P_3はP_0P_2上にある。

$r=\dfrac{P_1P_2}{P_0P_1}$で、$P_0P_1=1$、$P_1P_2=2\cos\theta$であるから　$\therefore r=2\cos\theta$ ……(答)

(2)

$k \geqq 0$のとき、$\overrightarrow{P_{k+1}P_{k+2}}$は$\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$を$\pi-\theta$回転して大きさを$r$倍したものであるから

$$\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=r^k\begin{pmatrix}\cos k(\pi-\theta)\\ \sin k(\pi-\theta)\end{pmatrix}=r^k\begin{pmatrix}\cos k\pi\cos k\theta\\ -\cos k\pi\sin k\theta\end{pmatrix}=(-r)^k\begin{pmatrix}\cos k\theta\\ -\sin k\theta\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$を表す複素数を$w_k$とすると　$w_k=(-r)^k(\cos k\theta-i\sin k\theta)=(-r)^k e^{-ik\theta}=(-re^{-i\theta})^k$

$\overrightarrow{P_0P_n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$であり、$P_n$を表す複素数$z_n$は$z_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}w_k=\sum_{k=1}^{n}(-re^{-i\theta})^{k-1}$で与えられるから

$$\therefore z_n=\frac{1-(-re^{-i\theta})^n}{1+re^{-i\theta}}=\frac{1-(-r)^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)}{1+r(\cos\theta-i\sin\theta)}=\frac{1-(-r)^n\cos n\theta+i(-r)^n\sin n\theta}{1+r\cos\theta-ir\sin\theta}$$

$r=2\cos\theta$より

$$\therefore z_n=\frac{1-(-2\cos\theta)^n\cos n\theta+i(-2\cos\theta)^n\sin n\theta}{1+2\cos^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-(-2\cos\theta)^n\cos n\theta+i(-2\cos\theta)^n\sin n\theta}{2+\cos 2\theta-i\sin 2\theta}\quad\text{……(答)}$$

(3)

数列$\{x_n\},\{y_n\}$がともに収束するとき、複素数列$\{z_n\}$が収束する。

このための必要条件は、$(-r)^n\to 0$、すなわち$|r|=2|\cos\theta|<1$であるから　$\cos\theta<\dfrac{1}{2}$　$\therefore \dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

逆に、$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき、$\{z_n\}$が収束するのは明らかである。(証明終)

(4)

(3)の条件を満たすとき　$z_n\to\dfrac{1}{2+\cos 2\theta-i\sin 2\theta}=\dfrac{2+\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{(2+\cos 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}=\dfrac{2+\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\frac{2+\cos 2\theta}{5+4\cos 2\theta}=\frac{2-\frac{1}{2}}{5-4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\quad\text{……(答)}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\beta(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\frac{\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{5-4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad\text{……(答)}$$

(5)

$$\beta(\theta)=\frac{\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}\quad \beta'(\theta)=\frac{2\cos 2\theta(5+4\cos 2\theta)-\sin 2\theta\cdot(-8\sin 2\theta)}{5+4\cos 2\theta}=\frac{8+10\cos 2\theta}{5+4\cos 2\theta}=\frac{2(10\cos^2\theta-1)}{5+4\cos 2\theta}$$

$\cos a=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{\pi}{3}<a<\frac{\pi}{2}\right)$とすると、$\sin a=\frac{3}{\sqrt{10}}$であり、

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1=2\cdot\frac{1}{10}-1=-\frac{4}{5}\quad \sin 2a=2\sin a\cos a=2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$$

$\beta(\theta)$の増減は下の通りで、求める最大値は　$\therefore \beta(a)=\dfrac{\frac{3}{5}}{5-4\cdot\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{3}$　……(答)

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\beta'(\theta)$		＋	0	－	
$\beta(\theta)$		↗		↘	

(注)

P_2は第 1 象限にあるとした。　(2)でz_nの分母を無理に実数化する必要はない。