2004年東大理後期$\boxed{2}$

(1)

$f(0), f(1), \cdots, f(7)$ の値がそれぞれ 0 か 1 をとるから　$\therefore 2^8 = 256$通り ……(答)

(2)

b_k は k が奇数のとき 0、k が偶数のとき 1。

$b_1 = f(a_1) = 0$　$f(0) = 0$ より　$\therefore a_1 = 0$　$b_2 = f(2a_1 + a_2) = f(a_2) = 1$　$f(1) = 1$ より　$\therefore a_2 = 1$

$b_3 = f(4a_1 + 2a_2 + a_3) = f(2 + a_3) = 0$　$f(3) = 0$ より　$\therefore a_3 = 1$

$b_4 = f(4a_2 + 2a_3 + a_4) = f(6 + a_4) = 1$　$f(6) = 1$ より　$\therefore a_4 = 0$

$b_5 = f(4a_3 + 2a_4 + a_5) = f(4 + a_5) = 0$　$f(4) = 0$ より　$\therefore a_5 = 0$

$b_6 = f(4a_4 + 2a_5 + a_6) = f(a_6) = 1$　$f(1) = 1$ より　$\therefore a_6 = 1$

01数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ は、$0,1,1,0,0,1,1,0,\cdots$ の繰り返しと仮定する。

このとき、$c_1 = a_1$、$c_2 = 2a_1 + a_2$、$k \geqq 3$ のとき $c_k = 4a_{k-2} + 2a_{k-1} + a_k$ とおくと

数列 $c_1, c_2, \cdots, c_N$ は、$0,1,3,6,4,1,3,6,4,\cdots$ となり、c_2 以降は $1,3,6,4$ の繰り返しとなる。

$b_k = f(c_k)$ であるから、01数列 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ は、$0,1,0,1,0,1,0,1,0,\cdots$ となり、確かに成立。

以上により　$k = 4l-3, 4l$ のとき $a_k = 0$、$k = 4l-2, 4l-1$ のとき $a_k = 1$ ……(答)

(3)

$(f(0), f(1)) = (0,1), (1,0)$ であり、$(f(2), f(3)), (f(4), f(5)), (f(6), f(7))$ の各組もそれぞれ 2 通りであるから

　$\therefore 2^4 = 16$通り ……(答)

(4)

$b_1 = f(a_1)$　a_1 は 0 か 1 であり、$b_1 = f(0)$ または $b_1 = f(1)$

条件により $f(0) \neq f(1)$ であるから、b_1 に応じて a_1 が決まる。

$b_2 = f(2a_1 + a_2)$　a_2 は 0 か 1 であり、

$a_1 = 0$ ならば $b_2 = f(0)$ または $b_2 = f(1)$　$a_1 = 1$ ならば $b_2 = f(2)$ または $b_2 = f(3)$

条件により $f(0) \neq f(1)$、$f(2) \neq f(3)$ であるから、b_2 に応じて a_2 が決まる。

$k \geqq 3$ のとき　$b_k = f(4a_{k-2} + 2a_{k-1} + a_k)$　a_k は 0 か 1 であり、

$4a_{k-2} + 2a_{k-1}$ は、a_{k-2}, a_{k-1} に応じて $0,2,4,6$ のいずれかの値をとる。

$4a_{k-2} + 2a_{k-1} = 0$　$(a_{k-2}, a_{k-1}) = (0, 0)$ のとき　$b_k = f(0)$ または $b_k = f(1)$

$4a_{k-2} + 2a_{k-1} = 2$　$(a_{k-2}, a_{k-1}) = (0, 1)$ のとき　$b_k = f(2)$ または $b_k = f(3)$

$4a_{k-2} + 2a_{k-1} = 4$　$(a_{k-2}, a_{k-1}) = (1, 0)$ のとき　$b_k = f(4)$ または $b_k = f(5)$

$4a_{k-2} + 2a_{k-1} = 6$　$(a_{k-2}, a_{k-1}) = (1, 1)$ のとき　$b_k = f(6)$ または $b_k = f(7)$

条件により $f(0) \neq f(1)$、$f(2) \neq f(3)$、$f(4) \neq f(5)$、$f(6) \neq f(7)$ であるから、b_k に応じて a_k が決まる。

以下帰納的に、順次 b_k に応じて a_k が決まるから、題意は示された。(証明終)