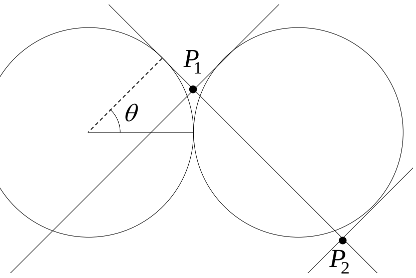
2004年東大理後期$\boxed{3}$

(1)



l の方程式は

$(\cos\theta)(x+1)+(\sin\theta)y=1 \quad (\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1-\cos\theta$

で与えられる。l に直交する直線は

$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=a$

と表せる。これが円 B に接するとき、点 $(1, 0)$ との距離が1であるから、

$$\frac{|\sin\theta-0-a|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=|\sin\theta-a|=1 \quad \therefore a=\pm1+\sin\theta$$

m の方程式は　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=\pm1+\sin\theta$　であるから、l と m との交点 P は

$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)x=\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(\pm1+\sin\theta)=\cos\theta\pm\sin\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta=\cos\theta\pm\sin\theta-\cos2\theta$

$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)y=\sin\theta(1-\cos\theta)-\cos\theta(\pm1+\sin\theta)=\sin\theta\mp\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\mp\cos\theta-\sin2\theta$

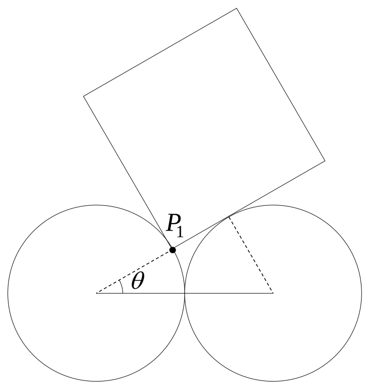
求める交点 P は　$\therefore(\cos\theta\pm\sin\theta-\cos2\theta,\ \sin\theta\mp\cos\theta-\sin2\theta)$（複号同順）……(答)

(2)

1辺の長さが2の正方形を、円 A, B の両方に接するように動かすことを考える。

このとき、2円に挟まれた1つの直角が描く軌跡は、(1)で求めた点 P の軌跡の一部になる。

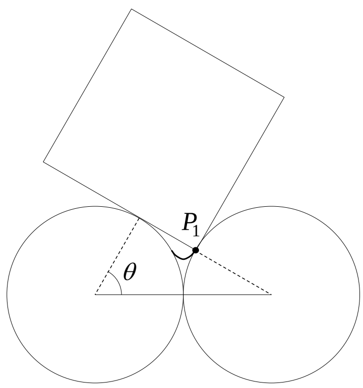
今、$P_1(\cos\theta-\sin\theta-\cos2\theta,\ \sin\theta+\cos\theta-\sin2\theta)$ とすると、



右図より、P_1 が2円に挟まれるような θ の範囲は $\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ である。

$\begin{cases} x_1=\cos\theta-\sin\theta-\cos2\theta \\ y_1=\sin\theta+\cos\theta-\sin2\theta \end{cases}$　とおくと、

$$x_1=\cos\theta-\sin\theta-\cos2\theta=\cos\theta-\sin\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=(\cos\theta-\sin\theta)\{1-(\cos\theta+\sin\theta)\}=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$



$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき、$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ は単調減少で、$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、

x_1 は単調増加であり、$-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x_1\leqq1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

これより、x 軸、直線 $x=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$、直線 $x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$、P_1 の軌跡によって

囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1+\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} y_1 dx_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin\theta + \cos\theta - \sin 2\theta)(\cos\theta - \sin\theta - \cos 2\theta)' d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin\theta + \cos\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta - \cos\theta + 2\sin 2\theta) d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-1 - 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin\theta\sin 2\theta + 3\cos\theta\sin 2\theta - 2\sin^2 2\theta) d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left\{ -1 - \sin 2\theta + \frac{3}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta) + \frac{3}{2}(\sin 3\theta + \sin\theta) - (1 - \cos 4\theta) \right\} d\theta$$

$$= \left[-2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 3\theta - \frac{1}{2}\cos 3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(0-1) - \frac{1}{2}(-1-0) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{5}{4}\sqrt{3}$$

対称性より、この正方形が通りえない部分は右図の通りで、面積は

$$\therefore 2 \times \frac{5}{6}\pi + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \times \left(-\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{5}{4}\sqrt{3} \right) = \pi - 2 + 3\sqrt{3}$$ ……(答)