2004年東大理$\boxed{2}$

(1)
ある自然数kを、$k=100p+10q+r$とおく。
p, q, rは非負整数で、$p \geqq 0,\ 0 \leqq q \leqq 9,\ 0 \leqq r \leqq 9$とする。

$$k^2=10000p^2+100q^2+r^2+2000pq+200rp+20qr=100(100p^2+q^2+20pq+2rp)+20qr+r^2$$

k^2の下2桁は、q, rのみで決まり、下1桁はrのみで決まる。

$20qr$の10の位の数は、$0, 2, 4, 6, 8$のいずれかである。

$a+b$が偶数になるとき、$20qr$の10の位の数と、r^2の10の位の数と、r^2の1の位の数の和が、偶数になる。

$20qr$の10の位の数は偶数であるから、r^2の10の位の数と1の位の数は、共に奇数か、共に偶数である。

$$0^2=0,\ 1^2=1,\ 2^2=4,\ 3^2=9,\ 4^2=16,\ 5^2=25,\ 6^2=36,\ 7^2=49,\ 8^2=64,\ 9^2=81$$

したがって、$r=0, 2, 8$に限られる。bはrのみで決まるから、0か4であることが示された。(証明終)

(2)
(1)より、3桁以上の平方数の、下2桁の数の和が偶数ならば、1の位の数は0か4である。
したがって、5桁以上の平方数の下4桁が同じ数字ならば、その数は0か4である。
ある5桁以上の平方数が、$l=10000p+4444\ (p \geqq 1)$と表されるとする。
lは偶数であるから、lの平方根も偶数であり、$\sqrt{l}=2m$とおけるから

$$l=4m^2=10000p+4444 \qquad m^2=2500p+1111$$

(解答1) (1)を使う
$2500p+1111$の下2桁は11であり、下2桁の数の和は偶数である。
ところが、1の位の数が0か4ではないので、(1)より、平方数にはなり得ない。

(解答2) (1)を使わない
m^2は奇数であり、mも奇数である。

$m=2n+1$とすると、$m^2=4(n^2+n)+1$であり、m^2を4で割った余りは1である。

ところが、$2500p+1111=4(625p+277)+3$であり、4で割った余りは1ではない。

以上により、5桁以上の平方数の下4桁が同じ数字ならば、その数は0しかあり得ない。
すなわち、その平方数は10000で割り切れる。(証明終)