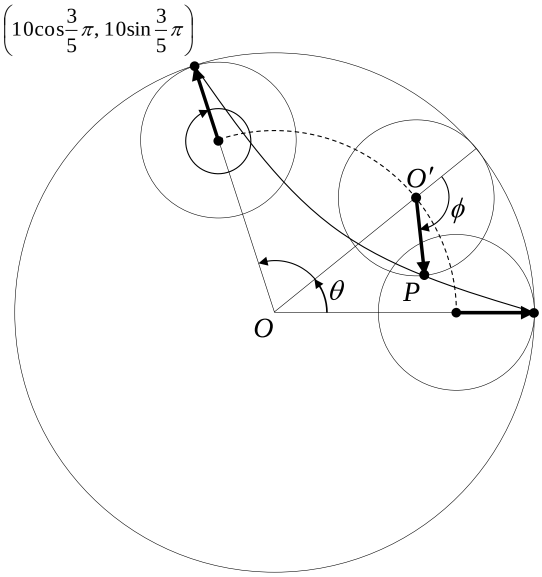
2004年東大理$\boxed{3}$



円 C の中心を $O(0,\ 0)$ とする。
最初、円 D の中心 O' は $(7,\ 0)$ に、点 P は $(10,\ 0)$ にあり、
反時計回りに円 D を転がすとする。

点 P が再び円 C に接するまでに、点 O' が動いた角は、

$$2\pi\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}\pi$$

点 O' が θ 動く間に、点 P が円 D 上を回転する角 ϕ は、

$\phi=\dfrac{10}{3}\theta$ と表せるので、点 P の x 軸に対する回転角は

$$\therefore\theta-\phi=-\frac{7}{3}\theta$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$ であるから、点 P の座標 $(x,\ y)$ は　$\therefore P\left(7\cos\theta+3\cos\dfrac{7}{3}\theta,7\sin\theta-3\sin\dfrac{7}{3}\theta\right)$

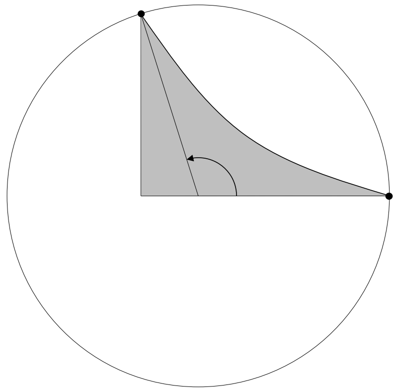
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{5}\pi$ において点 P が描く曲線、x 軸、直線 $x=10\cos\dfrac{3}{5}\pi$ に囲まれた部分の面積は

$$\int_{10\cos\frac{3}{5}\pi}^{10}ydx=\int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=7\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(7\sin^2\theta+4\sin\theta\sin\frac{7}{3}\theta-3\sin^2\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=7\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left\{\frac{7}{2}(1-\cos2\theta)+2\cos\frac{4}{3}\theta-2\cos\frac{10}{3}\theta-\frac{3}{2}\left(1-\cos\frac{14}{3}\theta\right)\right\}d\theta$$

$$=7\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(2-\frac{7}{2}\cos2\theta+2\cos\frac{4}{3}\theta-2\cos\frac{10}{3}\theta+\frac{3}{2}\cos\frac{14}{3}\theta\right)d\theta$$



$$=7\left[2\theta-\frac{7}{4}\sin2\theta+\frac{3}{2}\sin\frac{4}{3}\theta-\frac{3}{5}\sin\frac{10}{3}\theta+\frac{9}{28}\sin\frac{14}{3}\theta\right]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$

$$=7\left(\frac{6}{5}\pi-\frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi+\frac{3}{2}\sin\frac{4}{5}\pi-\frac{3}{5}\sin2\pi+\frac{9}{28}\sin\frac{14}{5}\pi\right)$$

$$=7\left(\frac{6}{5}\pi+\frac{7}{4}\sin\frac{\pi}{5}+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{5}+\frac{9}{28}\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}$$

分けられた2つの部分のうち、大きい方の面積は

$$\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\cdot10\sin\frac{3}{5}\pi\cdot10\cos\frac{3}{5}\pi+\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\frac{7}{5}\pi=\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}+25\sin\frac{6}{5}\pi+70\pi$$

$$=\frac{392}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}-25\sin\frac{\pi}{5}=\frac{392}{5}\pi$$

小さい方の面積は　$100\pi-\dfrac{392}{5}\pi=\dfrac{108}{5}\pi$　以上により　$\therefore\dfrac{108}{5}\pi,\ \dfrac{392}{5}\pi$　……(答)