2004年東大理 $\boxed{4}$

(1)

$f_1(x)=x^3-3x \quad f_1'(x)=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

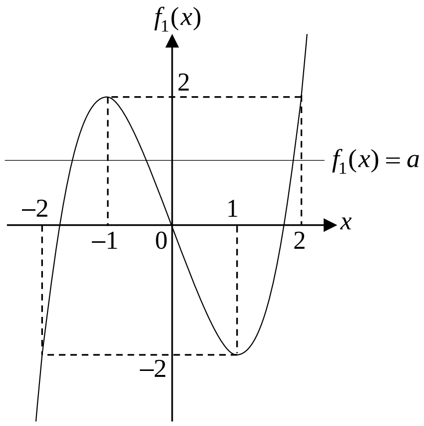
$x=-1$ のとき極大値 2 をとり、$x=1$ のとき極小値 -2 をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	↗	2	↘	-2	↗

$f_1(x)$ のグラフの概形は右図の通り。

$f_1(x)=a$ との交点の個数を考えればよい。

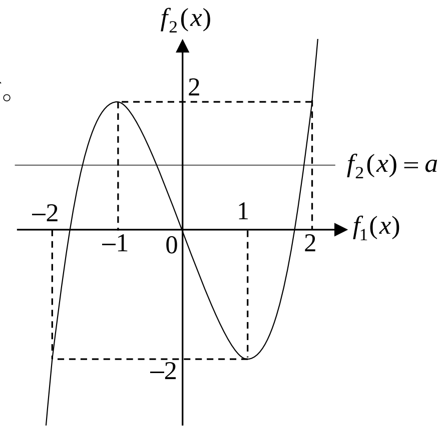
$$\therefore \begin{cases} a<-2,\ 2<a \text{ のとき} & 1\text{個} \\ a=\pm 2 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ -2<a<2 \text{ のとき} & 3\text{個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$



(2)

(1) より、$f_2(x)=f_1(f_1(x))=a$ を満たす実数 $f_1(x)$ の個数は

$$\begin{cases} a<-2,\ 2<a \text{ のとき} & 1\text{個} \\ a=\pm 2 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ -2<a<2 \text{ のとき} & 3\text{個} \end{cases}$$



$a<-2,\ 2<a$ のとき

$f_1(f_1(x))=a$ を満たす 1 個の実数 $f_1(x)$ は、$f_1(x)<-2,\ 2<f_1(x)$ を満たす。

このとき対応する実数 x は 1 個。

$a=-2$ のとき

$f_1(f_1(x))=a$ を満たす 2 個の実数 $f_1(x)$ は $f_1(x)=-2,\ 1$ である。

$f_1(x)=-2$ に対応する実数 x は $x=-2,\ 1$ の 2 個。

$f_1(x)=1$ に対応する実数 x は 3 個。

$a=2$ のとき

$f_1(f_1(x))=a$ を満たす 2 個の実数 $f_1(x)$ は $f_1(x)=-1,\ 2$ である。

$f_1(x)=-1$ に対応する実数 x は 3 個。

$f_1(x)=2$ に対応する実数 x は $x=-1,\ 2$ の 2 個。

$-2<a<2$ のとき

$f_1(f_1(x))=a$ を満たす 3 個の実数 $f_1(x)$ は、いずれも $-2<f_1(x)<2$ を満たす。

それぞれについて、対応する実数 x は 3 個。

以上により

$$\therefore \begin{cases} a<-2,\ 2<a \text{ のとき} & 1\text{個} \\ a=\pm 2 \text{ のとき} & 5\text{個} \\ -2<a<2 \text{ のとき} & 9\text{個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)

$-2<a<2$ のとき、 $f_n(x)=a$ を満たす実数 x の個数は 3^n 個であることを、数学的帰納法により示す。

(1)、(2) より、 $n=1,\ 2$ のとき成立。

$n=k$ のとき　 $f_k(x)=a$ を満たす実数 x の個数は 3^k 個と仮定する。

$n=k+1$ のとき

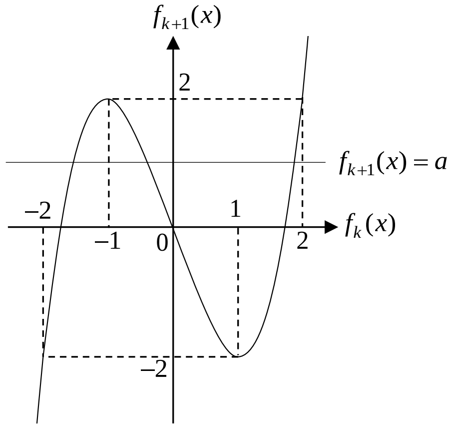
$f_{k+1}(x)=f_1(f_k(x))=a$ を満たす実数 $f_k(x)$ の個数は 3 個であり、

それらはいずれも $-2<f_k(x)<2$ を満たす。

仮定により、それぞれについて対応する実数 x は 3^k 個であるから、

$f_{k+1}(x)=a$ を満たす実数 x の個数は 3^{k+1} 個。

したがって、 $n=k+1$ でも成立。



以上により、 $-2<a<2$ のとき、 $f_n(x)=a$ を満たす実数 x の個数は 3^n 個である。

これは $a=0$ においても成立するので、題意は示された。（証明終）

（注）

(3) の問題文通り、 $f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n 個であることを、数学的帰納法により示すには

$n=1$ のとき　 $x=0,\ \pm\sqrt{3}$ の 3 個であり、成立。

$n=k$ のとき　 $f_k(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^k 個と仮定する。

$n=k+1$ のとき

$f_{k+1}(x)=f_1(f_k(x))=0$ を満たす実数 $f_k(x)$ は、 $f_k(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$ の 3 個。

$f_k(x)=0$ を満たす実数 x の個数は、仮定より 3^k 個だが、 $f_k(x)=\pm\sqrt{3}$ については仮定を使えない。

結局、 $f_k(x)=\pm\sqrt{3}$ を満たす実数 x の個数もそれぞれ 3^k 個であることを、別途示す必要が生じる。