

2004年東大理 5

(1)

$r \geq 2$  のとき  $A$  と  $B$  は共通部分を持たず、 $V = 2 \times \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$

$0 < r < 2$  のとき

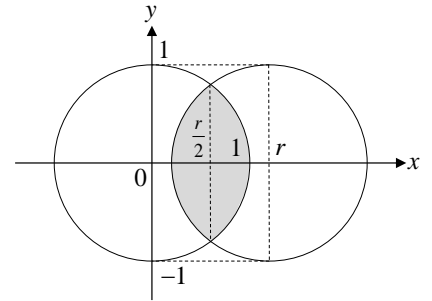
$A$  と  $B$  の共通部分は、右図の網掛部を  $x$  軸中心に回転した立体である。

この共通部分の体積は

$$2\pi \int_{\frac{r}{2}}^1 (1-x^2) dx = 2\pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{r}{2}}^1 = 2\pi \left( \frac{2}{3} - \frac{r}{2} + \frac{r^3}{24} \right) = \pi \left( \frac{r^3}{12} - r + \frac{4}{3} \right)$$

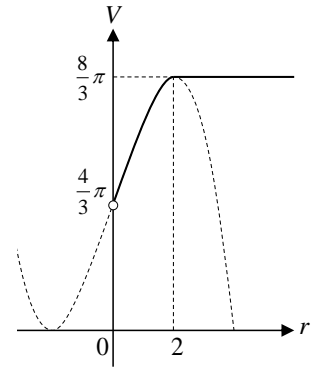
$$\therefore V = \frac{8}{3}\pi - \pi \left( \frac{r^3}{12} - r + \frac{4}{3} \right) = \pi \left( -\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} \right)$$

以上により  $0 < r < 2$  のとき  $V = \pi \left( -\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} \right)$ 、 $2 \leq r$  のとき  $V = \frac{8}{3}\pi$  ……(答)



$0 < r < 2$  のとき  $\frac{dV}{dr} = \pi \left( -\frac{r^2}{4} + 1 \right) = \pi \frac{(2+r)(2-r)}{4} > 0$

$0 < r < 2$  において  $V$  は単調増加であるから、グラフは右図の通り。



(2)

$V = 8$  のとき、 $V = \frac{1}{12}\pi(2+r)^2(4-r)$  より  $(2+r)^2(4-r) = \frac{96}{\pi}$

$3.14 < \pi < 3.15$  より  $30.47 \dots < \frac{96}{\pi} < 30.57 \dots$   $(2+1)^2(4-1) = 27$   $(2+2)^2(4-2) = 32$

求める  $r$  は  $1 < r < 2$  の範囲にある。

$$(2+1.5)^2(4-1.5) = 3.5^2 \cdot 2.5 = 30.625 > \frac{96}{\pi} \quad (2+1.4)^2(4-1.4) = 3.4^2 \cdot 2.6 = 30.056 < \frac{96}{\pi}$$

求める  $r$  は  $1.4 < r < 1.5$  の範囲にある。

$$(2+1.45)^2(4-1.45) = 3.45^2 \cdot 2.55 = 30.351375 < \frac{96}{\pi}$$

以上により、求める  $r$  は  $1.45 < r < 1.5$  の範囲にあるから、四捨五入して小数第1位まで求めると

$\therefore r = 1.5$  ……(答)