2004年東大理$\boxed{6}$

(1)

i)左端を3回裏返す　ii)左端を1回、中央を2回裏返す　iii)左端を1回、右端を2回裏返す

上記のいずれかであるから、求める確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$　……(答)

(2)

n回の操作後、黒い板の枚数が0枚、1枚、2枚、3枚である確率をa_n, b_n, c_n, d_nとする。

求める確率は、対称性より$a_n + \frac{1}{3}b_n$に等しい。

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n & \text{——①} \\ b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}c_n & \text{——②} \\ c_{n+1} = d_n + \frac{2}{3}b_n & \text{——③} \\ d_{n+1} = \frac{1}{3}c_n & \text{——④} \end{cases}$$

②＋③および$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$より

$$b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + d_n + \frac{2}{3}(b_n + c_n) = -\frac{1}{3}(b_n + c_n) + 1 \quad b_{n+1} + c_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left(b_n + c_n - \frac{3}{4}\right)$$

$b_1 = 1,\ c_1 = 0$ より　$b_n + c_n - \frac{3}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{3}{4}\right)$

$$\therefore b_n + c_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{——⑤} \quad \therefore a_n + d_n = 1 - (b_n + c_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{——⑥}$$

ここで、n回の操作後、黒い板は奇数回、白い板は偶数回裏返されているので、黒い板が奇数枚ならnは奇数であり、黒い板が偶数枚ならnは偶数。

nが奇数のとき$a_n = c_n = 0$であるから、⑤より

$$a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{1}{3}b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

nが偶数のとき$b_n = d_n = 0$であるから、⑥より

$$a_n + \frac{1}{3}b_n = a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

以上により

nが奇数のとき$\frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$、$n$が偶数のとき$\frac{1}{4}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$　……(答)