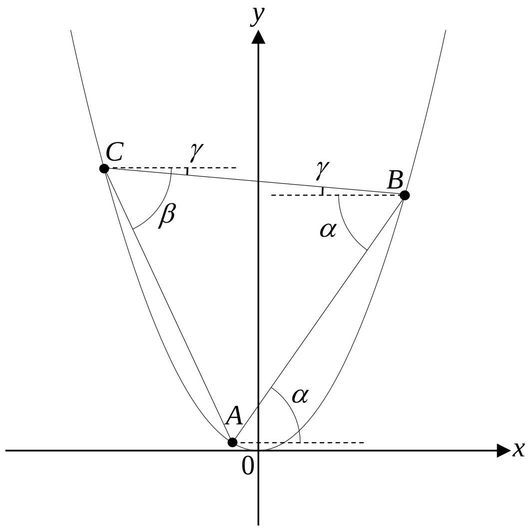
2004年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

（解答1）

$A(p,\ p^2),\ B(q,\ q^2),\ C(r,\ r^2)$とおき、右図のように角度$\alpha,\ \beta,\ \gamma$を定める。

ABの傾きは$\tan\alpha=\sqrt{2}<\sqrt{3}$であるから、$\alpha<\dfrac{\pi}{3}$である。



ABの傾きは$\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=q+p$と書けるから　$\therefore q+p=\sqrt{2}$ ——①

同様に、CAの傾きは$-\tan\beta$、CBの傾きは$-\tan\gamma$であるから

$\therefore r+p=-\tan\beta$ ——②

$\therefore r+q=-\tan\gamma$ ——③

$\gamma+\alpha=\dfrac{\pi}{3}$より、$\gamma=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$であるから

$$\tan\gamma=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\alpha}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5}$$

$\beta-\gamma=\dfrac{\pi}{3}$より、$\beta=\dfrac{\pi}{3}+\gamma=\dfrac{2}{3}\pi-\alpha$であるから

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{2}{3}\pi-\tan\alpha}{1+\tan\frac{2}{3}\pi\tan\alpha}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1}=\frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5}$$

③－②より　$\therefore q-p=\tan\beta-\tan\gamma=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$ ——④

①、④より

$$AB^2=a^2=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=(q-p)^2\left\{1+(q+p)^2\right\}=\frac{36\cdot 3}{25}\cdot 3 \quad \therefore a=\frac{18}{5}$$ ……（答）

（解答2）

$A(p,\ p^2),\ B(q,\ q^2),\ C(r,\ r^2)$とおく。$p<q$とする。

ABの傾きは$\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=q+p$と書けるから　$\therefore q+p=\sqrt{2}$ ——①

$AB=a$であるから

$$AB^2=a^2=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=(q-p)^2\left\{1+(q+p)^2\right\}=3(q-p)^2 \quad \therefore q-p=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$ ——②

①、②より　$\therefore p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}a,\ q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$　Aの座標は$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}a,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}a+\dfrac{1}{12}a^2\right)$と表せる。

また、$\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}a\right)$であり、$\overrightarrow{AC}$は$\overrightarrow{AB}$を$\dfrac{\pi}{3}$回転したものに等しいから

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}a\\ \frac{\sqrt{6}}{3}a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a\\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)a\end{pmatrix}\qquad \therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a),\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{12}a^2\right)$$

C は $y=x^2$ 上の点であることから

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{12}a^2=\frac{1}{2}(1-a)^2 \qquad 6+6a+a^2=6(1-2a+a^2) \qquad 5a^2-18a=0 \qquad a(5a-18)=0$$

$$\therefore a=\frac{18}{5}$$ ……(答)