2005 年東大文 1

$f(x)=cx^2+dx$ とおくと　$f'(x)=2cx+d$

$x\leqq 0$ のとき　$g'(x)=a$　$x>0$ のとき　$g'(x)=b$

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx=\int_{-1}^{0}\{2cx+(d-a)\}^2dx=\int_{-1}^{0}\{4c^2x^2+4c(d-a)x+(d-a)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}c^2x^3+2c(d-a)x^2+(d-a)^2x\right]_{-1}^{0}=\frac{4}{3}c^2-2c(d-a)+(d-a)^2$$

$$=\{(a-d)+c\}^2+\frac{1}{3}c^2=\{a+(c-d)\}^2+\frac{1}{3}c^2$$

$$\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx=\int_{0}^{1}\{2cx+(d-b)\}^2dx=\int_{0}^{1}\{4c^2x^2+4c(d-b)x+(d-b)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}c^2x^3+2c(d-b)x^2+(d+a)^2x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}c^2+2c(d-b)+(d-b)^2$$

$$=\{(b-d)-c\}^2+\frac{1}{3}c^2=\{b-(c+d)\}^2+\frac{1}{3}c^2$$

したがって、$a=-c+d,\ b=c+d$ とすればよい。このとき

　$g(-1)=-a$　$f(-1)=c-d=-a$　$\therefore g(-1)=f(-1)$

　$g(1)=b$　$f(1)=c+d=b$　$\therefore g(1)=f(1)$

以上により示された。（証明終）