2005 年東大文 $\boxed{3}$

$u=x^2$ とおき、2 次方程式 $u^2-2(s+t)u+(s-t)^2=0$ を解く。 $s\geqq 0,\ t\geqq 0$ であるから

$$u=s+t\pm\sqrt{(s+t)^2-(s-t)^2}=s+t\pm 2\sqrt{st}$$

$s+t-2\sqrt{st}=(\sqrt{s}-\sqrt{t})^2\geqq 0$ であるから、いずれも $u\geqq 0$ を満たす。　$\therefore x^2=s+t\pm 2\sqrt{st}$

ここで、 $s=\cos\theta,\ t=\sin\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置けるので、 $y=s+t$ と置くと

$$y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad \frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi \text{ より}\quad \therefore 1\leqq y\leqq\sqrt{2} \ \text{——①}$$

$$s^2+t^2=(s+t)^2-2st=y^2-2st=1 \text{ より}\quad \therefore st=\frac{y^2-1}{2}\ \text{——②}$$

st は①の範囲で単調増加であるから、 $s+t+2\sqrt{st}=y+\sqrt{2(y^2-1)}$ も①の範囲で単調増加。

一方、 $f(y)=y-\sqrt{2(y^2-1)}$ とすると

$$f'(y)=1-\sqrt{2}\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{\sqrt{y^2-1}-\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{y^2-1-2y^2}{\sqrt{y^2-1}\left(\sqrt{y^2-1}+\sqrt{2}y\right)}=-\frac{y^2+1}{\sqrt{y^2-1}\left(\sqrt{y^2-1}+\sqrt{2}y\right)}<0$$

したがって、 $y-\sqrt{2(y^2-1)}$ は①の範囲で単調減少。

$$\therefore 0\leqq y-\sqrt{2(y^2-1)}\leqq 1\leqq y+\sqrt{2(y^2-1)}\leqq 2\sqrt{2}\qquad \therefore 0\leqq x^2\leqq 2\sqrt{2}$$

以上により、求める範囲は　$\therefore -\sqrt[4]{8}\leqq x\leqq\sqrt[4]{8}$　……(答)