2005年東大理後期$\boxed{1}$

(1)

$\triangle OPQ$の面積は$\dfrac{1}{2}\sin\theta$であるから、$\triangle QAB$の面積は$\dfrac{1}{4}\sin\theta$に等しい。

$$\frac{1}{2}ab\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}ab\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \quad \therefore ab=\sin\frac{\theta}{2}$$ （証明終）

(2)

(1)と余弦定理より　$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{a^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

また、$PQ^2=1+1-2\cos\theta=2(1-\cos\theta)=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$より　$\therefore AB^2=a^2+\dfrac{PQ^2}{4a^2}-\dfrac{1}{2}PQ^2$

$a=\dfrac{1}{b}\sin\dfrac{\theta}{2},\ 0<b\leqq 1$であるから　$a\geqq\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}PQ$　$\therefore \dfrac{1}{2}PQ\leqq a\leqq PQ$

$t=a^2$とおき、$\dfrac{1}{4}PQ^2\leqq t\leqq PQ^2$における、$g(t)=t+\dfrac{PQ^2}{4t}-\dfrac{1}{2}PQ^2$の増減を考える。

$$g'(t)=1-\frac{PQ^2}{4t^2}=\frac{4t^2-PQ^2}{4t^2}=\frac{1}{t^2}\left(t-\frac{1}{2}PQ\right)\left(t+\frac{1}{2}PQ\right)$$

$0<\theta<\pi$より$0<PQ<2$であり、$0<\dfrac{PQ}{2}<1$であるから　$\therefore \dfrac{1}{4}PQ^2<\dfrac{1}{2}PQ$

$PQ<\dfrac{1}{2}$のとき

$\dfrac{1}{2}PQ>PQ^2$より増減は右の通りで、$t=PQ^2$のとき最大。

t	$\frac{1}{4}PQ^2$	$\cdots$	PQ^2
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$		$\nearrow$	

$$\therefore f(\theta)=g(PQ^2)=\frac{1}{2}PQ^2+\frac{1}{4}=2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}=1-\cos\theta+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}-\cos\theta$$

$PQ\geqq\dfrac{1}{2}$のとき

$\dfrac{1}{2}PQ\leqq PQ^2$より増減は右の通りで、$t=\dfrac{1}{2}PQ$のとき最大。

t	$\frac{1}{4}PQ^2$	$\cdots$	$\frac{1}{2}PQ$	$\cdots$	PQ^2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\therefore f(\theta)=g\left(\frac{1}{2}PQ\right)=PQ-\frac{1}{2}PQ^2=2\sin\frac{\theta}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

以上により　$\begin{cases} PQ<\dfrac{1}{2}のとき & f(\theta)=\dfrac{5}{4}-\cos\theta \\ PQ\geqq\dfrac{1}{2}のとき & f(\theta)=2\sin\dfrac{\theta}{2}-2\sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$ ……(答)

(3)

$PQ=\dfrac{1}{2}$ となる θ を α とすると　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}\qquad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であり、$f(\theta)$ が $\theta=\alpha$ において微分可能であることを示せばよい。

$f_1(\theta)=\dfrac{5}{4}-\cos\theta,\ f_2(\theta)=2\sin\dfrac{\theta}{2}-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ とすると

$f_1(\alpha)=\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}=\dfrac{3}{8},\ f_2(\alpha)=2\cdot\dfrac{1}{4}-2\cdot\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$ であるから、$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ において連続。

$f_1'(\theta)=\sin\theta,\ f_2'(\theta)=\cos\dfrac{\theta}{2}-4\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ より

$$\lim_{\theta\to\alpha-0}f'(\theta)=f_1'(\alpha)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8},\ \lim_{\theta\to\alpha+0}f'(\theta)=f_2'(\alpha)=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{15}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

したがって $f'(\alpha)$ が存在するから、$f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ において微分可能である。（証明終）

$0<\theta\leqq\alpha$ のとき $f'(\theta)>0$、$\alpha\leqq\theta<\pi$ のとき $f'(\theta)=0$ とすると　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{6}$　$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$

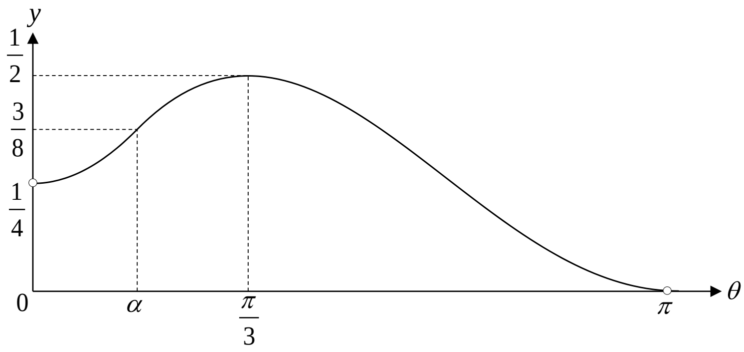
$0<\theta<\pi$ において $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから、増減は右の通り。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	1
$f'(\theta)$		＋	＋	＋	0	－	
$f(\theta)$		↗	↗	↗		↘	

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=\frac{1}{4},\ \lim_{\theta\to\pi-0}f(\theta)=0$

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}f'(\theta)=0,\ \lim_{\theta\to\pi-0}f'(\theta)=0$

$y=f(\theta)$ のグラフの概形は右図の通り。



$f(\theta)$ の最大値は

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$　……(答)