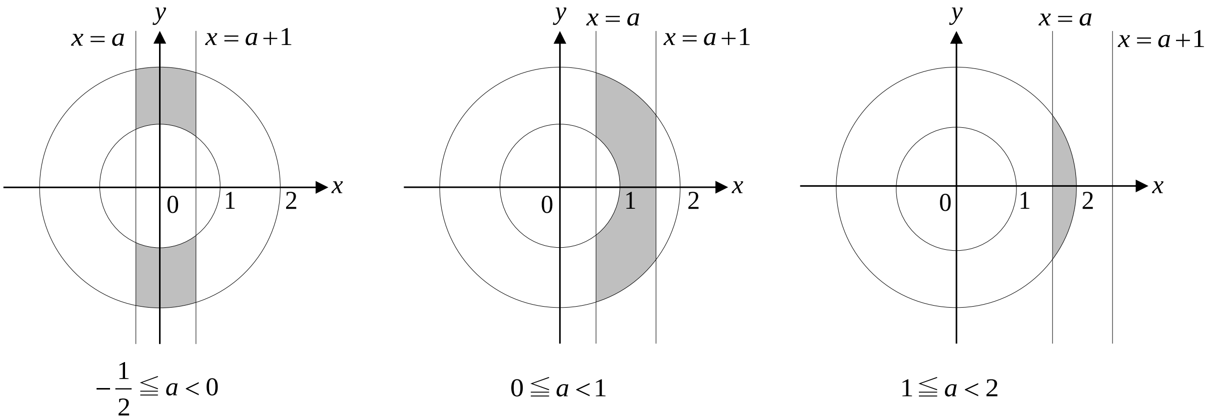
2005年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)



図より

$-\frac{1}{2} \leqq a < 0$ のとき　$S(a) = 2\int_a^{a+1} (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2})dx$

$0 \leqq a < 1$ のとき　$S(a) = 2\int_a^{a+1} \sqrt{4-x^2}\,dx - 2\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ……(答)

$1 \leqq a < 2$ のとき　$S(a) = 2\int_a^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(2)

$-\frac{1}{2} \leqq a < 0$ のとき　$S'(a) = 2\left\{\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{1-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}\right\}$

$0 \leqq a < 1$ のとき　$S'(a) = 2\left\{\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}\right\}$ ……(答)

$1 \leqq a < 2$ のとき　$S'(a) = -2\sqrt{4-a^2}$

(3)

$-\frac{1}{2} \leqq a < 0$ のとき　$S'(a) = 2\left\{\frac{3}{\sqrt{4-(a+1)^2} + \sqrt{1-(a+1)^2}} - \frac{3}{\sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}}\right\} > 0$

$1 \leqq a < 2$ のとき　$S'(a) = -2\sqrt{4-a^2} < 0$

$0 \leqq a < 1$ のとき　$S''(a) = -\frac{2(a+1)}{\sqrt{4-(a+1)^2}} + \frac{2a}{\sqrt{4-a^2}} - \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} = -\frac{2(a+1)}{\sqrt{4-(a+1)^2}} - 2a\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-a^2}}\right) < 0$

$S'(a)$ は $0 \leqq a < 1$ において単調減少。　$S'(0) = 2(\sqrt{3}-1) > 0$　$S'(1) = -2\sqrt{3} < 0$

したがって、$0 \leqq a < 1$ の範囲で $S'(a) = 0$ となる a がただ1つ存在する。

これを p とすると、$S(a)$ の増減は下の通り。

a	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(a)$		＋	＋	＋	0	－	－	－	
$S(a)$		↗	↗	↗		↘	↘	↘	

$S(a)$ は $a=p$ で最大となる。 $S'(p)=0$ より

$$\sqrt{4-(p+1)^2}-\sqrt{4-p^2}+\sqrt{1-p^2}=0 \quad \sqrt{3-2p-p^2}+\sqrt{1-p^2}=\sqrt{4-p^2}$$

$$3-2p-p^2+1-p^2+2\sqrt{(3-2p-p^2)(1-p^2)}=4-p^2 \quad 2\sqrt{p^4+2p^3-4p^2-2p+3}=p^2+2p$$

$$4(p^4+2p^3-4p^2-2p+3)=p^4+4p^3+4p^2 \quad \therefore 3p^4+4p^3-20p^2-8p+12=0$$

求める 4 次方程式は　$\therefore 3x^4+4x^3-20x^2-8x+12=0$ ……(答)

(4)

$x=\sqrt{2}t$ とおくと　$12t^4+8\sqrt{2}t^3-40t^2-8\sqrt{2}t+12=0$　$t\neq 0$ であるから

$3\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)+2\sqrt{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)-10=0$　$z=t-\dfrac{1}{t}$ とおくと　$z^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2$

$3(z^2+2)+2\sqrt{2}z-10=0$　$\therefore 3z^2+2\sqrt{2}z-4=0$ ……(答)

(5)

$\dfrac{dz}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}>0$　$0<\sqrt{2}t<1$ より　$0<t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$z<\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$　$\therefore z<0$

$3z^2+2\sqrt{2}z-4=0$ を解くと　$z=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{3}$　$z<0$ より　$z=t-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{3}$

$\therefore 3t^2+(\sqrt{2}+\sqrt{14})t-3=0$　$t>0$ より　$t=\dfrac{-(\sqrt{2}+\sqrt{14})+\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{14})^2+36}}{6}=\dfrac{-(\sqrt{2}+\sqrt{14})+\sqrt{52+4\sqrt{7}}}{6}$

$\therefore a=\sqrt{2}t=\dfrac{-(2+2\sqrt{7})+2\sqrt{26+2\sqrt{7}}}{6}=\dfrac{-(1+\sqrt{7})+\sqrt{26+2\sqrt{7}}}{3}$

$\dfrac{-(1+\sqrt{7})+\sqrt{26+2\sqrt{7}}}{3}=\dfrac{6}{1+\sqrt{7}+\sqrt{26+2\sqrt{7}}}<\dfrac{6}{1+2+5}=\dfrac{3}{4}<1$　であるから、確かに $0\leqq a<1$ を満たす。

以上により　$\therefore a=\dfrac{-(1+\sqrt{7})+\sqrt{26+2\sqrt{7}}}{3}$ ……(答)