2005年東大理 $\boxed{1}$

(1)

$$f(x)=\frac{\log x}{x} \quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2} \quad f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-3+2\log x}{x^3}$$

数学的帰納法により示す。$n=1,\ 2$ のとき成立。

$n=k$ のとき　$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ と表されると仮定する。

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{\frac{b_k}{x}\cdot x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)\cdot(k+1)x^k}{x^{2k+2}}=\frac{-(k+1)a_k+b_k-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

したがって、$a_{k+1}=-(k+1)a_k+b_k,\ b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とすれば $n=k+1$ でも成立。

以上により示された。(証明終)

$a_n,\ b_n$ に関する漸化式は $\begin{cases} a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n \\ b_{n+1}=-(n+1)b_n \end{cases}$ ……(答)

(2)

$a_1=1,\ b_1=-1$ であるから　$b_n=-nb_{n-1}=(-n)(-n-1)b_{n-2}=(-n)(-n-1)\cdots(-2)b_1=(-1)^n n!$

$b_n=(-1)^n n!$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。$n=1,\ 2$ のとき成立。

$n=k$ のとき　$b_k=(-1)^k k!$ と仮定すると、$b_{k+1}=-(k+1)b_k=(-1)^{k+1}(k+1)!$

したがって、$n=k+1$ でも成立。　$\therefore b_n=(-1)^n n!$

次に、$a_{n+1}=-(n+1)a_n+(-1)^n n!$ より　$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=-\dfrac{a_n}{n!}+\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

$c_n=\dfrac{a_n}{n!}$ と置くと　$c_{n+1}=-c_n+\dfrac{(-1)^n}{n+1}$　$c_1=\dfrac{a_1}{1}=1$　$c_2=-c_1-\dfrac{1}{2}=-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$　$c_3=-c_2+\dfrac{1}{3}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

$c_n=(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=(-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。$n=1,\ 2$ のとき成立。

$n=k$ のとき　$c_k=(-1)^{k-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$ と仮定すると、$c_{k+1}=-c_k+\dfrac{(-1)^k}{k+1}=(-1)^k\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{(-1)^k}{k+1}=(-1)^k\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}$

したがって、$n=k+1$ でも成立。　$\therefore c_n=\dfrac{a_n}{n!}=(-1)^{n-1}h_n$　$\therefore a_n=(-1)^{n-1}n!\,h_n$

以上により　$\therefore a_n=(-1)^{n-1}n!\,h_n,\ b_n=(-1)^n n!$ ……(答)