2005年東大理$\boxed{3}$

(1)

$$f(x)=\frac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\} \qquad f'(x)=\frac{1}{2}\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}-xe^{-2(x-1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2x)e^{-2(x-1)}$$

$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}-(1-2x)e^{-2(x-1)}=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

$f'(x)$ の $x>\frac{1}{2}$ における増減は、右の通りで、$x=1$ において極小となる。

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $f'(1)=0$ および $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\frac{1}{2}$ より　$\therefore 0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$　（証明終）

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		−	0	＋
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(2)

$x_0=1$ のとき、$x_1=f(1)=1$ で、以下帰納的に $x_2=1,\ x_3=1,\ \cdots,x_n=1$ がわかるから、$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=1$

$f(x)$ は単調増加であるから、$f(x)=1$ となるのは $x=1$ のみで、$x_0\neq 1$ であれば、以下帰納的に $x_n\neq 1$ である。

$x_0\neq 1$ のとき、平均値の定理より、$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)$ であるような実数 c が、x_n と1の間に存在する。

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+e}{4}>\frac{1}{2}$ より、$x_0>\frac{1}{2}$ のとき、以降 $x_n>\frac{1}{2}$ であるから、(1) より

$$\left|\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}\right|=\left|f'(c)\right| \qquad 0<\frac{|x_{n+1}-1|}{|x_n-1|}<\frac{1}{2} \qquad \therefore 0<|x_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|x_n-1|$$

繰り返し用いると　$\therefore 0<|x_n-1|<\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1|$

はさみうちの原理より　$\lim_{x\to\infty}|x_n-1|=0$　　$\therefore \lim_{x\to\infty}x_n=1$

以上により、$x_0>\frac{1}{2}$ のとき、$\lim_{x\to\infty}x_n=1$ が示された。（証明終）