2005年東大理$\boxed{5}$文$\boxed{4}$共通

(1)

甲が2回目にカードを引かないとき、$a+b=a>N$ となることはない。
$a=N$ のとき、$a<c$ にも $a<c+d\leqq N$ にもなり得ないから、甲が勝つ確率は1である。

$a\leqq N-1$ のとき、$a\geqq c$ となる確率は $\dfrac{a}{N}$

$a\geqq c$ のとき、$a<c+d\leqq N$ となる条件は $a-c+1\leqq d\leqq N-c$ で、このような d の個数は

$(N-c)-(a-c+1)+1=N-a$ 個であるから、$a<c+d\leqq N$ とならない確率は $\dfrac{N-(N-a)}{N}=\dfrac{a}{N}$

甲が勝つ確率は $\dfrac{a}{N}\times\dfrac{a}{N}=\dfrac{a^2}{N^2}$　これは $a=N$ でも成立。

以上により、甲が2回目にカードを引かないとき、甲が勝つ確率は $\dfrac{a^2}{N^2}$ ……(答)

(2)

甲が2回目にカードを引くとする。甲が勝つには $a+b\leqq N$ でなければならない。
$a=N$ のとき、b の値に関わらず $a+b>N$ となるから、甲が勝つ確率は0である。

$a\leqq N-1$ のとき、$a+b\leqq N$ となる条件は $b\leqq N-a$ で、$1\leqq b\leqq N-a$。
$1\leqq b\leqq N-a$ の範囲で b を固定して考える。

$a+b\geqq c$ となる確率は $\dfrac{a+b}{N}$

$a+b\geqq c$ のとき、$a+b<c+d\leqq N$ となる条件は $a+b-c+1\leqq d\leqq N-c$ で、このような d の個数は
$(N-c)-(a+b-c+1)+1=N-a-b$ 個であるから、$a+b<c+d\leqq N$ とならない確率は

$$\frac{N-(N-a-b)}{N}=\frac{a+b}{N}$$

$1\leqq b\leqq N-a$ の範囲で b を固定したとき、甲が勝つ確率は $\dfrac{a+b}{N}\times\dfrac{a+b}{N}=\dfrac{(a+b)^2}{N^2}=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{N^2}$

それぞれの b について、甲が引く確率は $\dfrac{1}{N}$ であるから、甲が勝つ確率は

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{b=1}^{N-a}\frac{a^2+2ab+b^2}{N^2}&=\frac{a^2(N-a)}{N^3}+\frac{a(N-a)(N-a+1)}{N^3}+\frac{(N-a)(N-a+1)(2N-2a+1)}{6N^3}\\&=\frac{(N-a)\left\{6a^2+6a(N-a+1)+(N-a+1)(2N-2a+1)\right\}}{6N^3}=\frac{(N-a)\left\{2N^2+(2a+3)N+2a^2+3a+1\right\}}{6N^3}\end{aligned}$$

これは $a=N$ でも成立。以上により、甲が2回目にカードを引くとき、甲が勝つ確率は

$$\therefore\frac{(N-a)\left\{2N^2+(2a+3)N+2a^2+3a+1\right\}}{6N^3}$$ ……(答)