

2006 年東大文①

$$AB=x, DA=y \text{ とすると } x+y=44-26=18 \text{ ——①}$$

三角形 BCD は二等辺三角形であり、 $\angle CBD=\angle CDB=\theta$ とすると

$$\text{正弦定理より } \frac{13}{\sin \theta}=2 \cdot \frac{65}{8} \quad \therefore \sin \theta=13 \cdot \frac{4}{65}=\frac{4}{5} \quad \therefore \cos \theta=\frac{3}{5}$$

$$\text{これより } \therefore BD=2 \cdot 13 \cos \theta=26 \cdot \frac{3}{5}=\frac{78}{5}$$

円周角の定理より、 $\angle CAB=\angle CAD=\theta$ であるから $\angle BAD=2\theta$

$$\cos 2\theta=\cos^2 \theta-\sin^2 \theta=\frac{9-16}{25}=-\frac{7}{25}$$

三角形 ABD に関する余弦定理より

$$BD^2=\frac{78^2}{25}=x^2+y^2-2xy \cos 2\theta=(x+y)^2-2xy+\frac{14}{25}xy=18^2-\frac{36}{25}xy$$

$$36xy=18^2 \cdot 5^2-78^2=(90+78)(90-78)=168 \cdot 12 \quad \therefore xy=56 \text{ ——②}$$

①と②より、 x, y は二次方程式 $t^2-18t+56=0$ の 2 解であり、

$$(t-4)(t-14)=0 \quad \therefore t=4, 14$$

したがって $AB=4, DA=14$ または $AB=14, DA=4$ ……(答)

