

2006 年東大文 ③

(1)

$3z \geq x + y + z = xyz$ より $3 \geq xy \quad \therefore xy = 1, 2, 3$

$xy = 1$ のとき $x = 1, y = 1 \quad 1 + 1 + z = z \quad 2 = 0$ となり不適。

$xy = 2$ のとき $x = 1, y = 2 \quad 1 + 2 + z = 2z \quad \therefore z = 3$

$xy = 3$ のとき $x = 1, y = 3 \quad 1 + 3 + z = 3z \quad z = 2 \quad y \leq z$ より不適。

以上により $\therefore (x, y, z) = (1, 2, 3) \dots\dots$ (答)

(2)

$x \leq y \leq z$ とすると $x^3 + y^3 + z^3 = xyz \leq z^3 \quad \therefore x^3 + y^3 \leq 0$

これを満たす正の実数 x, y は存在しない。

対称性から、同様に $y^3 + z^3 \leq 0, z^3 + x^3 \leq 0$ が導かれる。

したがって、このような正の実数の組 (x, y, z) は存在しない。(証明終)