2006年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

$x=2t+t^2,\ y=t+2t^2$ より　$\dfrac{dx}{dt}=2+2t,\ \dfrac{dy}{dt}=1+4t$　$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\div\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1+4t}{2+2t}$ ……(答)

(2)

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+4t}{2+2t}=-\dfrac{1}{2}$ より　$2+8t=-2-2t$　$10t=-4$　$\therefore\ t=-\dfrac{2}{5}$

このとき　$x=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{25}=-\dfrac{16}{25}$　$y=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{8}{25}=-\dfrac{2}{25}$　点 A の座標は $\left(-\dfrac{16}{25},\ -\dfrac{2}{25}\right)$ ……(答)

(3)

$x=2t+t^2,\ y=t+2t^2$ を代入すると

$$X=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{2(2t+t^2)-(t+2t^2)\right\}=\frac{3}{\sqrt{5}}t\qquad Y=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{(2t+t^2)+2(t+2t^2)\right\}=\frac{1}{\sqrt{5}}(4t+5t^2)$$

t を消去すると

$$\therefore Y=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(4\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}X+5\cdot\frac{5}{9}X^2\right)=\frac{5\sqrt{5}}{9}X^2+\frac{4}{3}X\quad\text{……(答)}$$

(4)

$y=\dfrac{5\sqrt{5}}{9}x^2+\dfrac{4}{3}x=\dfrac{5\sqrt{5}}{9}\left(x+\dfrac{6\sqrt{5}}{25}\right)^2-\dfrac{4\sqrt{5}}{25}$ は、原点を通る放物線であり、これを C' とおく。

一方、$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とすると、$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と表せるので、

点 $(X,\ Y)$ は点 $(x,\ y)$ を原点中心に θ 回転した点である。すなわち、C を原点中心に θ 回転すると C' になるから、C は C' を原点中心に $-\theta$ 回転したものである。

なお、C' の頂点における接線の傾きは0で、

この接線を $-\theta$ 回転させると、傾きは　$-\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$

すなわち、C' の頂点 $\left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{25},\ -\dfrac{4\sqrt{5}}{25}\right)$ を $-\theta$ 回転させると、

(2) で求めた点 A に一致する。