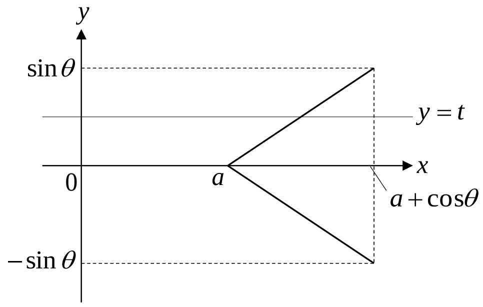
2006 年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)

曲面 S は円錐の側面になる。 S と平面 $y=t$ の交差部を考える。

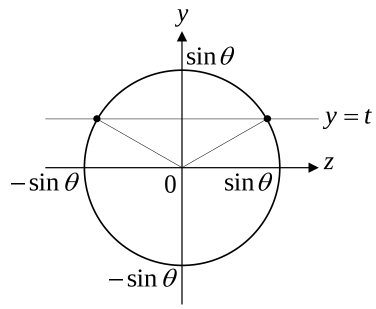


xy 平面上において、 S と $y=t\,(-\sin\theta \leqq t \leqq \sin\theta)$ の交点は

$$\left(a+\frac{1}{\tan\theta}|t|,\ t,\ 0\right)$$

と表される。

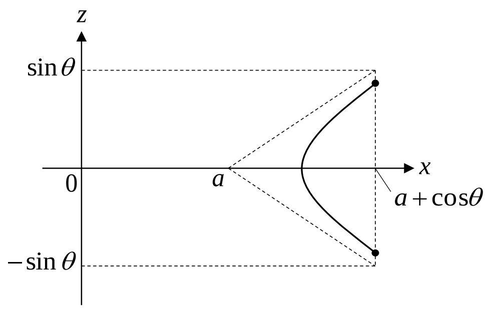
また、点 $(a+\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$ が描く円と $y=t$ との交点は



$$\left(a+\cos\theta,\ t,\ \pm\sqrt{\sin^2\theta - t^2}\right)$$

となる。

S と $y=t$ の交差部の概形を xz 平面上に描くと右図の通りで、



y 軸から最も近い点は　$\left(a+\frac{1}{\tan\theta}|t|,\ t,\ 0\right)$

このとき y 軸までの距離は　$R_1 = a+\frac{1}{\tan\theta}|t|$

y 軸から最も遠い点は　$\left(a+\cos\theta,\ t,\ \pm\sqrt{\sin^2\theta - t^2}\right)$

このとき y 軸までの距離は　$R_2 = \sqrt{(a+\cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - t^2)} = \sqrt{a^2+2a\cos\theta+1-t^2}$

S を y 軸のまわりに 1 回転させると、 $y=t$ との断面は、内径 R_1、外径 R_2 のドーナツ型になるから、面積は

$$\begin{aligned}
\pi({R_2}^2 - {R_1}^2) &= \pi\left\{a^2+2a\cos\theta+1-t^2-\left(a+\frac{1}{\tan\theta}|t|\right)^2\right\} \\
&= \pi\left\{a^2+2a\cos\theta+1-t^2-\left(a^2+\frac{2a}{\tan\theta}|t|+\frac{1}{\tan^2\theta}t^2\right)\right\} \\
&= \pi\left(2a\cos\theta+1-\frac{2a}{\tan\theta}|t|-\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}t^2\right) = \pi\left(2a\cos\theta+1-\frac{2a}{\tan\theta}|t|-\frac{1}{\sin^2\theta}t^2\right)
\end{aligned}$$

対称性より

$$V = 2\pi\int_0^{\sin\theta}\left(2a\cos\theta+1-\frac{2a}{\tan\theta}t-\frac{1}{\sin^2\theta}t^2\right)dt = 2\pi\left[(2a\cos\theta+1)t-\frac{a}{\tan\theta}t^2-\frac{1}{3\sin^2\theta}t^3\right]_0^{\sin\theta}$$

$$= 2\pi\left(a\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\frac{1}{3}\sin\theta\right) = 2\pi\sin\theta\left(a\cos\theta+\frac{2}{3}\right)\quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

$V(\theta)=2\pi\sin\theta\left(4\cos\theta+\dfrac{2}{3}\right)$ とすると

$$V'(\theta)=2\pi\cos\theta\left(4\cos\theta+\frac{2}{3}\right)+2\pi\sin\theta\cdot(-4\sin\theta)=2\pi\left(4\cos^2\theta-4\sin^2\theta+\frac{2}{3}\cos\theta\right)$$

$$=2\pi\left(8\cos^2\theta+\frac{2}{3}\cos\theta-4\right)=\frac{4}{3}\pi(12\cos^2\theta+\cos\theta-6)=\frac{4}{3}\pi(4\cos\theta+3)(3\cos\theta-2)$$

$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ となる θ を α とすると、増減は右の通り。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$V'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$V(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$V(\theta)$ は $\theta=\alpha$ のとき最大であり、$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるから

求める最大値は　$V(\alpha)=2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{20\sqrt{5}}{9}\pi$　……(答)

(注)

S と $y=t\,(-\sin\theta\leqq t\leqq\sin\theta)$ の交差部に現れる曲線の方程式は、以下のように求められる。

S の $x=k$ $\left(a+\dfrac{1}{\tan\theta}|t|\leqq k\leqq a+\cos\theta\right)$ による切り口は、半径 $(\tan\theta)(k-a)$ の円である。

この円と、$y=t$ との交点は　$\left(k,\ t,\ \pm\sqrt{(\tan^2\theta)(k-a)^2-t^2}\right)$

$z=\pm\sqrt{(\tan^2\theta)(k-a)^2-t^2}$ より　$z^2=(\tan^2\theta)(k-a)^2-t^2$　$(\tan^2\theta)(k-a)^2-z^2=t^2$

k を x で置き換えれば　$\therefore(\tan^2\theta)(x-a)^2-z^2=t^2$ $\left(a+\dfrac{1}{\tan\theta}|t|\leqq x\leqq a+\cos\theta\right)$

これは $t\neq 0$ であれば双曲線の一部、$t=0$ であればＶ字型である。