2006 年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

数学的帰納法で示す。 $p=1,\ 2,\ 3$ のとき成立。

$p \leqq m$ のとき、 $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ によって、 $S_p(n)=\sum_{k=1}^{n} k^p$ と表されると仮定する。

$$(k+1)^{m+2}-k^{m+2}={}_{m+2}C_{m+1}\,k^{m+1}+{}_{m+2}C_m\,k^m+\cdots+{}_{m+2}C_1\,k+{}_{m+2}C_0 \quad \text{——①}$$

$k=1$ から $k=n$ まで①の両辺の和をとると

$$(n+1)^{m+2}-1={}_{m+2}C_{m+1}\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}+{}_{m+2}C_m\sum_{k=1}^{n}k^m+\cdots+{}_{m+2}C_1\sum_{k=1}^{n}k+{}_{m+2}C_0\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=(m+2)\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}+{}_{m+2}C_m\,S_m(n)+\cdots+{}_{m+2}C_1\,S_1(n)+n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^{m+1}=\frac{(n+1)^{m+2}-1-{}_{m+2}C_m\,S_m(n)-\cdots-{}_{m+2}C_1 S_1(n)-n}{m+2}=\frac{(n+1)^{m+2}-n-1-\sum_{p=1}^{m}{}_{m+2}C_p\,S_p(n)}{m+2}$$

したがって、 $p=m+1$ のとき、$m+2$ 次多項式 $S_{m+1}(x)$ によって、 $S_{m+1}(n)=\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}$ と表される。

以上により示された。(証明終)

(2)

与式が恒等式であるとき、 x に任意の正整数を代入しても成立するので、 $n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(n)=n^q(n+1)^q \quad \text{——①} \qquad \sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(n-1)=(n-1)^q n^q \quad \text{——②}$$

①−②より $\displaystyle\sum_{j=1}^{q}a_jn^{2j-1}=n^q\left\{(n+1)^q-(n-1)^q\right\}$ ——③

$(n+1)^q-(n-1)^q=2{}_qC_{q-1}n^{q-1}+2{}_qC_{q-3}n^{q-3}+2{}_qC_{q-5}n^{q-5}\cdots$ より、③を整理すると

$$\therefore a_qn^{2q-1}+a_{q-1}n^{2q-3}+a_{q-2}n^{2q-5}+\cdots=2{}_qC_{q-1}n^{2q-1}+2{}_qC_{q-3}n^{2q-3}+2{}_qC_{q-5}n^{2q-5}+\cdots$$

$a_{q-i}=2{}_qC_{q-2i-1}$ であるから、 $j=q-i$ とすると

$i=q-j \quad q-2i-1=q-2(q-j)-1=2j-q-1 \quad \therefore a_j=2{}_qC_{2j-q-1}$

ただし、$2j-q-1 \geqq 0$ であり $\quad 2j \geqq q+1 \quad \therefore j \geqq \dfrac{q+1}{2} \quad j<\dfrac{q+1}{2}$ であれば $\quad \therefore a_j=0$

以上により $\quad \therefore a_j=\begin{cases}0 & \left(\left[\dfrac{q+2}{2}\right]>j\right)\\ 2{}_qC_{2j-q-1} & \left(\left[\dfrac{q+2}{2}\right]\leqq j\leqq q\right)\end{cases}$ ……(答) $\quad \left[\dfrac{q+2}{2}\right]$ は $\dfrac{q+2}{2}$ を超えない最大の整数。

(3)

与式が恒等式であるとき、xに任意の正整数を代入しても成立するので、$n \geqq 2$のとき

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(n) = n^{q-1}(n+1)^{q-1}(cn+q) \text{ ——①} \quad \sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(n-1) = (n-1)^{q-1} n^{q-1}(cn-c+q) \text{ ——②}$$

①−②より

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q-1} b_j n^{2j} &= n^{q-1}\left\{(n+1)^{q-1}(cn+q) - (n-1)^{q-1}(cn-c+q)\right\} \\ &= n^{q-1}\left\{cn(n+1)^{q-1} + q(n+1)^{q-1} - c(n-1)^q - q(n-1)^{q-1}\right\} \\ &= c\left\{n^q(n+1)^{q-1} - n^{q-1}(n-1)^q\right\} + qn^{q-1}\left\{(n+1)^{q-1} - (n-1)^{q-1}\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{q-1} b_j n^{2j} = c\left\{n^q(n+1)^{q-1} - n^{q-1}(n-1)^q\right\} + qn^{q-1}\left\{(n+1)^{q-1} - (n-1)^{q-1}\right\} \text{ ——③}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&n^q(n+1)^{q-1} - n^{q-1}(n-1)^q \\ &= n^q(n^{q-1} + {}_{q-1}C_{q-2}n^{q-2} + {}_{q-1}C_{q-3}n^{q-3} + \cdots) - n^{q-1}(n^q - {}_qC_{q-1}n^{q-1} + {}_qC_{q-2}n^{q-2} - \cdots) \\ &= ({}_{q-1}C_{q-3} - {}_qC_{q-2})n^{2q-3} + ({}_{q-1}C_{q-5} - {}_qC_{q-4})n^{2q-5} + ({}_{q-1}C_{q-7} - {}_qC_{q-6})n^{2q-7} \cdots \\ &\quad + ({}_{q-1}C_{q-2} + {}_qC_{q-1})n^{2q-2} + ({}_{q-1}C_{q-4} + {}_qC_{q-3})n^{2q-4} + ({}_{q-1}C_{q-6} + {}_qC_{q-5})n^{2q-6} \cdots\end{aligned}$$

${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$ より、${}_{n-1}C_{r-1} - {}_nC_r = -{}_{n-1}C_r$ であるから

$$\begin{aligned}&\therefore n^q(n+1)^{q-1} - n^{q-1}(n-1)^q \\ &= -({}_{q-1}C_{q-2}n^{2q-3} + {}_{q-1}C_{q-4}n^{2q-5} + {}_{q-1}C_{q-6}n^{2q-7} + \cdots) \\ &\quad + ({}_{q-1}C_{q-2} + {}_qC_{q-1})n^{2q-2} + ({}_{q-1}C_{q-4} + {}_qC_{q-3})n^{2q-4} + ({}_{q-1}C_{q-6} + {}_qC_{q-5})n^{2q-6} + \cdots\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}&n^{q-1}\left\{(n+1)^{q-1} - (n-1)^{q-1}\right\} \\ &= n^{q-1}(2{}_{q-1}C_{q-2}n^{q-2} + 2{}_{q-1}C_{q-4}n^{q-4} + 2{}_{q-1}C_{q-6}n^{q-6} + \cdots) = 2{}_{q-1}C_{q-2}n^{2q-3} + 2{}_{q-1}C_{q-4}n^{2q-5} + 2{}_{q-1}C_{q-6}n^{2q-7} \cdots\end{aligned}$$

これより、③の右辺を整理すると

$$\begin{aligned}&c\left\{n^q(n+1)^{q-1} - n^{q-1}(n-1)^q\right\} + qn^{q-1}\left\{(n+1)^{q-1} - (n-1)^{q-1}\right\} \\ &= (2q-c)({}_{q-1}C_{q-2}n^{2q-3} + 2{}_{q-1}C_{q-4}n^{2q-5} + {}_{q-1}C_{q-6}n^{2q-7} + \cdots) \\ &\quad + c({}_{q-1}C_{q-2} + {}_qC_{q-1})n^{2q-2} + c({}_{q-1}C_{q-4} + {}_qC_{q-3})n^{2q-4} + c({}_{q-1}C_{q-6} + {}_qC_{q-5})n^{2q-6} + \cdots\end{aligned}$$

一方、③の左辺 $\sum_{j=1}^{q-1} b_j n^{2j} = b_{q-1}n^{2q-2} + \cdots + b_2 n^4 + b_1 n^2$ は偶数次の項しか持たない。

したがって、$c = 2q$ が必要十分であるので、

$$\begin{aligned}&\therefore b_{q-1}n^{2q-2} + \cdots + b_2 n^4 + b_1 n^2 \\ &\quad = 2q({}_{q-1}C_{q-2} + {}_qC_{q-1})n^{2q-2} + 2q({}_{q-1}C_{q-4} + {}_qC_{q-3})n^{2q-4} + 2q({}_{q-1}C_{q-6} + {}_qC_{q-5})n^{2q-6} + \cdots\end{aligned}$$

ここで、

$$q({}_{q-1}C_{q-i-1}+{}_qC_{q-i})=q\left\{\frac{(q-1)!}{i!(q-i-1)!}+\frac{q!}{i!(q-i)!}\right\}=q\cdot\frac{q!}{i!(q-i)!}\left(\frac{q-i}{q}+1\right)=(2q-i){}_qC_{q-i}$$

$$\therefore b_{q-1}n^{2q-2}+\cdots+b_2n^4+b_1n^2$$
$$=2(2q-1){}_qC_{q-1}n^{2q-2}+2(2q-3){}_qC_{q-3}n^{2q-4}+2(2q-5){}_qC_{q-5}n^{2q-6}+\cdots$$

$b_{q-i}=2(2q-2i+1){}_qC_{q-2i+1}$ であるから、 $j=q-i$ とすると

$i=q-j$ $\quad q-2i+1=q-2(q-j)+1=2j-q+1$ $\quad \therefore b_j=2(2j+1){}_qC_{2j-q+1}$

ただし、$2j-q+1\geqq 0$ であり $\quad 2j\geqq q-1$ $\quad \therefore j\geqq\dfrac{q-1}{2}$ $\quad j<\dfrac{q-1}{2}$ であれば $\quad \therefore b_j=0$

以上により $\quad \therefore c=2q,\ b_j=\begin{cases}0 & \left(\left[\dfrac{q}{2}\right]>j,\right)\\ 2(2j+1){}_qC_{2j-q+1} & \left(\left[\dfrac{q}{2}\right]\leqq j\leqq q-1\right)\end{cases}$ ……(答) $\left[\dfrac{q}{2}\right]$ は、$\dfrac{q}{2}$ を超えない最大の整数。

(4)

(2) より、 $\displaystyle\sum_{j=\left[\frac{q+2}{2}\right]}^{q}a_jS_{2j-1}(x)=x^q(x+1)^q$ であるから、両辺を微分すると

$$\sum_{j=\left[\frac{q+2}{2}\right]}^{q}a_j\frac{d}{dx}S_{2j-1}(x)=qx^{q-1}(x+1)^q+qx^q(x+1)^{q-1}=qx^{q-1}(x+1)^{q-1}(2x+1)$$

(3) より、$q\geqq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]}^{q-1}b_jS_{2j}(x)=qx^{q-1}(x+1)^{q-1}(2x+1)$ であるから

$$\therefore\ \sum_{j=\left[\frac{q+2}{2}\right]}^{q}a_j\frac{d}{dx}S_{2j-1}(x)=\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]}^{q-1}b_jS_{2j}(x)\ \ (q\geqq 2)$$

$j\geqq\left[\dfrac{q}{2}\right]$ のとき $\quad b_j=2(2j+1){}_qC_{2j-q+1}=(2j+1)a_{j+1}$ であるから

$$\sum_{j=\left[\frac{q+2}{2}\right]}^{q}a_j\frac{d}{dx}S_{2j-1}(x)=\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]}^{q-1}(2j+1)a_{j+1}S_{2j}(x)=\sum_{j=\left[\frac{q+2}{2}\right]}^{q}(2j-1)a_jS_{2j-2}(x)$$

$$\therefore\ \sum_{j=\left[\frac{q+2}{2}\right]}^{q}a_j\left\{\frac{d}{dx}S_{2j-1}(x)-(2j-1)S_{2j-2}(x)\right\}=0\ \ (q\geqq 2)\ \text{——①}$$

$S_3(x)=\dfrac{x^2(x+1)^2}{4}=\dfrac{x^4+2x^3+x^2}{4}$ であるから

$\dfrac{d}{dx}S_3(x)=\dfrac{4x^3+6x^2+2x}{4}=\dfrac{2x^3+3x^2+x}{2}=\dfrac{x(x+1)(2x+1)}{2}$ $\quad\therefore \dfrac{d}{dx}S_3(x)=3S_2(x)$

題意は $p=3$ において成立。

①において $q=3$ とすると $\displaystyle\sum_{j=2}^{3}a_j\left\{\frac{d}{dx}S_{2j-1}(x)-(2j-1)S_{2j-2}(x)\right\}=0$

$\dfrac{d}{dx}S_3(x)=3S_2(x)$ より $\quad a_3\left\{\dfrac{d}{dx}S_5(x)-5S_4(x)\right\}=0 \quad \therefore \dfrac{d}{dx}S_5(x)=5S_4(x)$

題意は $p=5$ において成立。

$q=4$ とすると $\displaystyle\sum_{j=3}^{4}a_j\left\{\frac{d}{dx}S_{2j-1}(x)-(2j-1)S_{2j-2}(x)\right\}=0$

$\dfrac{d}{dx}S_5(x)=5S_4(x)$ より $\quad a_4\left\{\dfrac{d}{dx}S_7(x)-7S_6(x)\right\}=0 \quad \therefore \dfrac{d}{dx}S_7(x)=7S_6(x)$

題意は $p=7$ において成立。

以下、順次①を用いて、$\dfrac{d}{dx}S_9(x)=9S_8(x),\ \dfrac{d}{dx}S_{11}(x)=11S_{10}(x),\ \cdots$ が帰納的に示される。

したがって題意は示された。（証明終）