2006年東大理$\boxed{1}$

(1)

$\overrightarrow{OP_1}=\left(x_1,\ \dfrac{1}{x_1}\right),\ \overrightarrow{OP_2}=\left(x_2,\ \dfrac{1}{x_2}\right)\ (x_1\neq 0,\ x_2\neq 0)$ とする。$\overrightarrow{OP_3}=(x_3,\ y_3)$ とすると、$\overrightarrow{OP_3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$ より

$$x_3=\frac{3}{2}x_2-x_1,\ y_3=\frac{3}{2x_2}-\frac{1}{x_1}\qquad x_3y_3=\frac{9}{4}-\frac{3x_2}{2x_1}-\frac{3x_1}{2x_2}+1=\frac{13}{4}-\frac{3}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$x_3y_3=1$ となるには、$\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{3}{2}$ でなければならない。

$x=\dfrac{x_2}{x_1}$ とおくと　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$　$2x^2-3x+2=0$　$D=9-4\cdot 2\cdot 2=-7<0$

実数解が存在しないので　$\therefore \dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}\neq\dfrac{3}{2}$　したがって、P_3 は $xy=1$ 上にない。(証明終)

(2)

$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1),\ \overrightarrow{OP_2}=(\cos\theta_2,\ \sin\theta_2)$ とする。$\overrightarrow{OP_3}=(x_3,\ y_3)$ とすると、$\overrightarrow{OP_3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$ より

$$x_3=\frac{3}{2}\cos\theta_2-\cos\theta_1,\ y_3=\frac{3}{2}\sin\theta_2-\sin\theta_1$$

$$x_3{}^2+y_3{}^2=\frac{9}{4}+1-3(\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1)=\frac{9}{4}+1-3\cos(\theta_2-\theta_1)=1$$

$$3\cos(\theta_2-\theta_1)=\frac{9}{4}\qquad\therefore\cos(\theta_2-\theta_1)=\frac{3}{4}$$

$\overrightarrow{OP_4}=(x_4,\ y_4)$ とすると、$\overrightarrow{OP_4}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_2}$ より

$$x_4=\frac{9}{4}\cos\theta_2-\frac{3}{2}\cos\theta_1-\cos\theta_2=\frac{5}{4}\cos\theta_2-\frac{3}{2}\cos\theta_1,\ y_4=\frac{9}{4}\sin\theta_2-\frac{3}{2}\sin\theta_1-\sin\theta_2=\frac{5}{4}\sin\theta_2-\frac{3}{2}\sin\theta_1$$

$$x_4{}^2+y_4{}^2=\frac{25}{16}+\frac{9}{4}-\frac{15}{4}(\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1)=\frac{61}{16}-\frac{15}{4}\cos(\theta_2-\theta_1)$$

$\cos(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{3}{4}$ であるから　$\therefore x_4{}^2+y_4{}^2=\dfrac{61}{16}-\dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{61-45}{16}=1$

したがって、P_4 は $x^2+y^2=1$ 上にある。(証明終)