2006 年東大理 $\boxed{3}$

(1)

OQ の傾きは $-\dfrac{1}{\alpha}$ であるから、Q の座標は $(-\alpha,\ 1)$ である。

l は OQ の中点を通る傾き α の直線であるから、l の式は　$\therefore\ y=\alpha\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=\alpha x+\dfrac{\alpha^2+1}{2}$

次に、R の座標を $(r,\ (\tan\theta)r)$ とすると、PR の傾きは $-\dfrac{1}{\alpha}$ であるから

$$\frac{(\tan\theta)r-p}{r}=-\frac{1}{\alpha}\quad (\tan\theta)r-p-\frac{1}{\alpha}r\quad \therefore\ p=\left(\tan\theta+\frac{1}{\alpha}\right)r \text{ ——①}$$

PR の中点は l 上にあるので

$$\frac{(\tan\theta)r+p}{2}=\alpha\cdot\frac{r}{2}+\frac{a^2+1}{2}\quad (\tan\theta)r+p=\alpha r+\alpha^2+1\quad \therefore\ p=(\alpha-\tan\theta)r+\alpha^2+1 \text{ ——②}$$

①、②より r を消去して

$$p=\frac{\alpha-\tan\theta}{\tan\theta+\dfrac{1}{\alpha}}p+\alpha^2+1\quad \left(\tan\theta+\frac{1}{\alpha}\right)p=(\alpha-\tan\theta)p+(\alpha^2+1)\left(\tan\theta+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$(2p-\alpha^2-1)\tan\theta=\alpha p-\frac{1}{\alpha}p+\alpha+\frac{1}{\alpha}\quad \therefore\ \tan\theta=\frac{\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)p+\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}{2p-\alpha^2-1}=\frac{(\alpha^2-1)p+\alpha^2+1}{\alpha(2p-\alpha^2-1)}\ \cdots\cdots\text{(答)}$$

(2)

$-\dfrac{1}{\alpha}=\tan\dfrac{\theta}{3}$ と表せることが条件である。

正接に関する加法定理、倍角定理より

$$\tan\theta=\frac{\tan\dfrac{2}{3}\theta+\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan\dfrac{2}{3}\theta\tan\dfrac{\theta}{3}}=\frac{\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}+\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}\tan\dfrac{\theta}{3}}=\frac{3\tan\dfrac{\theta}{3}-\tan^3\dfrac{\theta}{3}}{1-3\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{-\dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}}{1-\dfrac{3}{\alpha^2}}=\frac{1-3\alpha^2}{\alpha^3-3\alpha}$$

(1) の結果と比較すると

$$\frac{1-3\alpha^2}{\alpha^2-3}=\frac{(\alpha^2-1)p+\alpha^2+1}{2p-\alpha^2-1}\quad (1-3\alpha^2)(2p-\alpha^2-1)=(\alpha^2-3)\left\{(\alpha^2-1)p+\alpha^2+1\right\}$$

$$\left\{(\alpha^4-4\alpha^2+3)+2(3\alpha^2-1)\right\}p=(3\alpha^4+2\alpha^2-1)-(\alpha^4-2\alpha^2-3)\quad \therefore (\alpha^2+1)^2(p-2)=0$$

$-\dfrac{1}{\alpha}=\tan\dfrac{\theta}{3}$ が θ に関わらず成立するには、$(\alpha^2+1)^2(p-2)=0$ が α に関わらず成立すればよい。

そのような p が存在するのは明らかである。　$\therefore\ p=2\ \cdots\cdots$(答)