2006年東大理 $\boxed{4}$

(1)

$y=1$ のとき　$x^2+1+z^2=xz$　$(x+z)^2=3xz-1$　$x+z \geqq 2\sqrt{xz}$ より

$(x+z)^2 \leqq \dfrac{3}{4}(x+z)^2-1$　$\dfrac{1}{4}(x+z)^2 \leqq -1$ となり、不適。

$y=2$ のとき　$x^2+4+z^2=2xz$　$(x+z)^2=4xz-4$　$x+z \geqq 2\sqrt{xz}$ より

$(x+z)^2 \leqq (x+z)^2-4$　$0 \leqq -4$ となり、不適。

$y=3$ のとき　$x^2+9+z^2=3xz$　$(x+z)^2=5xz-9$　$x+z \geqq 2\sqrt{xz}$ より

$(x+z)^2 \leqq \dfrac{5}{4}(x+z)^2-9$　$(x+z)^2 \geqq 36$　$\therefore x+z \geqq 6$　$x \leqq y$ であるから

$x=1$ のとき　$1+9+z^2=3z$　$z^2-3z+10=0$　$D=9-40=-36<0$ より、不適。
$x=2$ のとき　$4+9+z^2=6z$　$z^2-6z+13=0$　$D/4=9-13=-4<0$ より、不適。
$x=3$ のとき　$9+9+z^2=9z$　$z^2-9z+18=0$　$(z-3)(z-6)=0$　$\therefore z=3,\ 6$
いずれも $x+z \geqq 6$ を満たす。

以上により　$\therefore (x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)$ ……(答)

(2)
題意を満たすような組 $(b,\ c,\ z)$ が存在すると仮定すると
$a^2+b^2+c^2=abc$ ——①　$b^2+c^2+z^2=bcz$ ——②　$a \leqq b \leqq c \leqq z$ ——③
②−①より　$z^2-a^2=bc(z-a)$　$(z-a)(z+a-bc)=0$　$\therefore z=a,\ bc-a$

$z=a$ のとき　結局 $a=b=c=z$ であるから　$3a^2=a^3$　$a^2(a-3)=0$　$\therefore a=3$
したがって、$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ であるとき、$z=3$ とすればよい。
$z=bc-a$ のとき　$z-c=bc-a-c \geqq bc-b-c=(b-1)c-b$
(1)より、$b \geqq 3$ がわかっているので　$z-c \geqq (b-1)c-b \geqq 2c-b>c-b \geqq 0$
したがって、$z=bc-a$ は③を満たすから、$z=bc-a$ ととればよい。
以上により示された。(証明終)

(3)
正の整数の組 $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ を、以下の漸化式で定める。
$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(3,\ 3,\ 6)$　$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})=(y_n,\ z_n,\ y_n z_n-x_n)$
(2)の議論により、$(x_n,\ y_n,\ z_n)$ が条件(A)を満たすのは明らかである。
また、$z_{n+1}-z_n=(y_n-1)z_n-x_n \geqq 2z_n-x_n>z_n-x_n \geqq 0$ より　$\therefore z_{n+1}>z_n$
したがって、$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1}) \neq (x_n,\ y_n,\ z_n)$ であるから、一致する組はない。
以上により、条件(A)を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は無限に存在する。(証明終)