2006 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(a_n+1)^2}$ より $a_n>0$ であるから

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{{a_n}^2+2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2+a_n>\frac{1}{a_n}+2 \quad \therefore b_{n+1}-b_n>2$$

$n>1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=b_n-b_1=b_n-2>2(n-1) \quad \therefore b_n>2n$ （証明終）

(2)

(1) より、$n>1$ のとき $\dfrac{1}{b_n}<\dfrac{1}{2n} \quad \therefore 0<a_n<\dfrac{1}{2n}$

これより $0<a_1+a_2+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right) \quad 0<\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)<\dfrac{1}{2n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

ここで、$x>0$ において $y=\dfrac{1}{x}$ は単調減少で、$k\geqq 1$ のとき $\dfrac{1}{k+1}<\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ であるから

$$\frac{1}{k+1}<\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k} \quad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\log(k+1)-\log k\right\}<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1<\log n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n} \quad \log n+\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\log n+1 \quad \therefore \frac{\log n}{2n}+\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{\log n}{2n}+\frac{1}{2n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ であるから、はさみうちの原理より $\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0$

したがって、はさみうちの原理より $\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$ ……(答)

(3)

$n>1$ のとき、$na_n<\dfrac{1}{2}$ (1) より、$k>1$ のとき $b_{k+1}-b_k=a_k+2$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+2) \quad b_{n+1}-b_1=\sum_{k=1}^{n}a_k+2n \quad b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}a_k+2n+2$$

$$\frac{1}{na_{n+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\frac{2}{n} \quad na_{n+1}=\frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\dfrac{2}{n}}$$

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(a_n+1)^2}<a_n$ であるから $\therefore \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\dfrac{2}{n}}<na_n<\dfrac{1}{2}$

(1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$ であるから、はさみうちの原理より $\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2}$ ……(答)

（注）

念のため、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ の証明は以下の通り。

まず、$n>1$ において $0<\log n<\sqrt{n}$ を示す。$f(n)=\sqrt{n}-\log n$ とすると、$f'(n)=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sqrt{n}-2}{2n}$

n	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(n)$		$-$	0	$+$
$f(n)$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(n)$ は $n=4$ において最小であり、$f(4)=2(1-\log 2)>0$
したがって、$n>1$ において $f(n)>0$ が示されたので

$$\therefore 0<\log n<\sqrt{n} \qquad \therefore 0<\frac{\log n}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ であるから、はさみうちの原理より　$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$