2006年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$t=e^x$ とおくと、$x>0$ において $t>1$ となる。$t>1$ において、$h(t)=\dfrac{12(t^3-3t)}{t^2-1}$ の増減を考える。

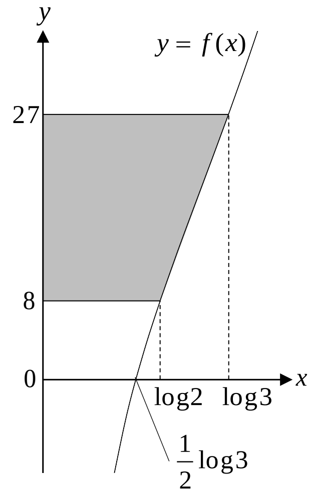
$$h'(t)=12\cdot\frac{(3t^2-3)(t^2-1)-(t^3-3t)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}=12\cdot\frac{3(t^4-2t^2+1)-2(t^4-3t^2)}{(t^2-1)^2}=\frac{12(t^4+3)}{(t^2-1)^2}>0$$

$h'(t)>0$ であるから、$h(t)$ は $t>1$ において単調増加であり、$f(x)$ は $x>0$ において単調増加である。

$$\lim_{t\to+\infty}h(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{12\left(t-\dfrac{3}{t}\right)}{1-\dfrac{1}{t^2}}=+\infty \qquad \lim_{t\to1+0}h(t)=-\infty$$

$h(t)$ の $t>1$ における値域は実数全体であるから、$f(x)$ の $x>0$ における値域は実数全体である。
以上により、$y=f(x)\,(x>0)$ は、実数全体を定義域とする逆関数を持つ。（証明終）

(2)
求める値は右図の網掛部の面積である。



$h(2)=\dfrac{12(8-6)}{4-1}=8,\ h(3)=\dfrac{12(27-9)}{9-1}=27$ より、$f(\log 2)=8,\ f(\log 3)=27$

求める値は

$$\begin{aligned}(27-8)\times\log 3-\int_{\log 2}^{\log 3}\{f(x)-8\}dx&=19\log 3-12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{3x}-3e^x}{e^{2x}-1}dx+8(\log 3-\log 2)\\&=27\log 3-8\log 2-12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{3x}-3e^x}{e^{2x}-1}dx\end{aligned}$$

ここで、$t=e^x$ とおくと　$dt=e^x dx$

$$\begin{aligned}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{3x}-3e^x}{e^{2x}-1}dx&=\int_2^3\frac{t^2-3}{t^2-1}dt=\int_2^3\left(1-\frac{2}{t^2-1}\right)dt=\int_2^3\left(1-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=\Big[t-\log(t-1)+\log(t+1)\Big]_2^3=3-\log 2+2\log 2-2-\log 3\\&=1+\log 2-\log 3\end{aligned}$$

したがって

$$\int_8^{27}g(x)dx=27\log 3-8\log 2-12(1+\log 2-\log 3)=39\log 3-20\log 2-12 \quad \cdots\cdots(答)$$