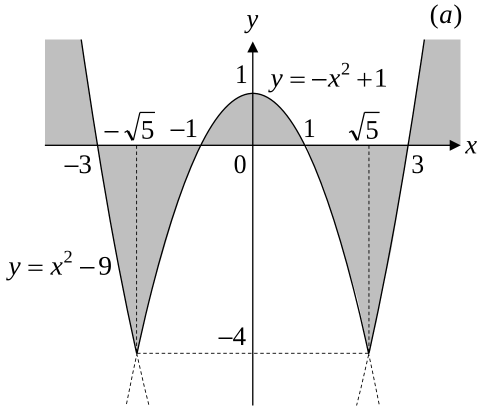
2007年東大文$\boxed{1}$

(1)

$y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$ が表す領域は、y 軸に関して対称であるから、$x\geqq 0$ について考える。



$0\leqq x<\sqrt{5}$ のとき　$x^2-5<0$　$y\{y-(5-x^2)+4\}=y(y+x^2-1)\leqq 0$

　$0\leqq x<1$ のとき　$-x^2+1>0$ であるから　$\therefore 0\leqq y\leqq -x^2+1$

　$1\leqq x<\sqrt{5}$ のとき　$-x^2+1\leqq 0$ であるから　$\therefore -x^2+1\leqq y\leqq 0$

$\sqrt{5}\leqq x$ のとき　$x^2-5\geqq 0$　$y\{y-(x^2-5)+4\}=y(y-x^2+9)\leqq 0$

　$\sqrt{5}\leqq x<3$ のとき　$x^2-9<0$ であるから　$\therefore x^2-9\leqq y\leqq 0$

　$3\leqq x$ のとき　$x^2-9\geqq 0$ であるから　$\therefore 0\leqq y\leqq x^2-9$

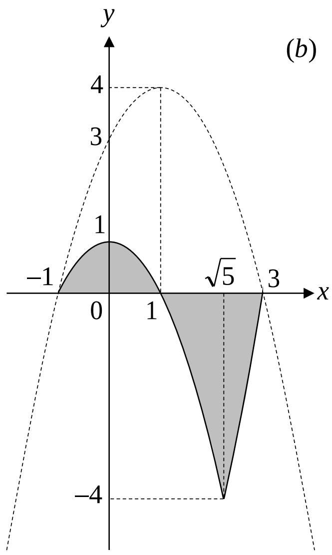
以上、対称性により

　$0\leqq |x|<1$ のとき　$0\leqq y\leqq -x^2+1$　$1\leqq |x|<\sqrt{5}$ のとき　$-x^2+1\leqq y\leqq 0$

　$\sqrt{5}\leqq |x|<3$ のとき　$x^2-9\leqq y\leqq 0$　$3\leqq |x|$ のとき　$0\leqq y\leqq x^2-9$

$y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$ が表す領域は、右図(a)の通り。

これと、$y+x^2-2x-3\leqq 0$、$y\leqq -(x+1)(x-3)=-(x-1)^2+4$ との共通範囲は、右図(b)の通り。いずれも境界線を含む。



(2)

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{\sqrt{5}}(x^2-1)dx+\int_{\sqrt{5}}^{3}(-x^2+9)dx$$

$$=\frac{2^3}{6}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{5}}+\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{\sqrt{5}}^{3}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{3}+18-\frac{22}{3}\sqrt{5}$$

$$=20-\frac{20}{3}\sqrt{5}$$ ……(答)