

2007 年東大文 [3]

正の整数  $m$  を、 $m=10p+q$  とおく。

$p, q$  は非負整数で、 $p \geq 0, 0 \leq q \leq 9$  とする。

$$m^2 = 100p^2 + 20pq + q^2$$

$$\begin{aligned} m^4 &= 10000p^4 + 400p^2q^2 + q^4 + 4000p^3q + 40pq^3 + 200p^2q^2 \\ &= 10000p^4 + 600p^2q^2 + 4000p^3q + 40pq^3 + q^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5m^4 &= 50000p^4 + 3000p^2q^2 + 20000p^3q + 200pq^3 + 5q^4 \\ &= 100(500p^4 + 30p^2q^2 + 200p^3q + 2pq^3) + 5q^4 \end{aligned}$$

$5m^4$  の下 2 桁は、 $q$  のみで決まる。

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81$$

$$0^4 = 0, 1^4 = 1, 2^4 = 16, 3^4 = 81, 4^4 = (10+6)^2 = 100+120+36=256,$$

$$5^4 = (20+5)^2 = 400+200+25=625, 6^4 = (30+6)^2 = 900+360+36=1296,$$

$$7^4 = (40+9)^2 = 1600+720+81=2401, 8^4 = (60+4)^2 = 3600+480+16=4096,$$

$$9^4 = (80+1)^2 = 6400+160+1=6561$$

$$5 \cdot 0^4 = 0, 5 \cdot 1^4 = 5, 5 \cdot 2^4 = 80, 5 \cdot 3^4 = 405, 5 \cdot 4^4 = 1280,$$

$$5 \cdot 5^4 = 3125, 5 \cdot 6^4 = 6480, 5 \cdot 7^4 = 12005, 5 \cdot 8^4 = 20480, 5 \cdot 9^4 = 32805$$

したがって、 $5m^4$  の下 2 桁に現れるのは  $\therefore 00, 05, 25, 80 \dots\dots$  (答)