2007年東大理後期 1

(1)

曲線 C は $y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ であり、点 P_0 は $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 上にある。 $\therefore y_0=\dfrac{2}{\sqrt{x_0}}$

$y'=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{x\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ であり、 P_0 における接線は

$$y=-\frac{1}{x_0\sqrt{x_0}}(x-x_0)+y_0=-\frac{1}{x_0\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{x_0}}+y_0=-\frac{{y_0}^3}{8}x+\frac{y_0}{2}+y_0=-\frac{{y_0}^3}{8}x+\frac{3}{2}y_0$$

P_1 は $y=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 上にあるから

$$-\frac{2}{\sqrt{x}}=-\frac{{y_0}^3}{8}x+\frac{3}{2}y_0 \quad (y_0\sqrt{x})^3-12y_0\sqrt{x}-16=0 \quad (y_0\sqrt{x}+2)^2(y_0\sqrt{x}-4)=0$$

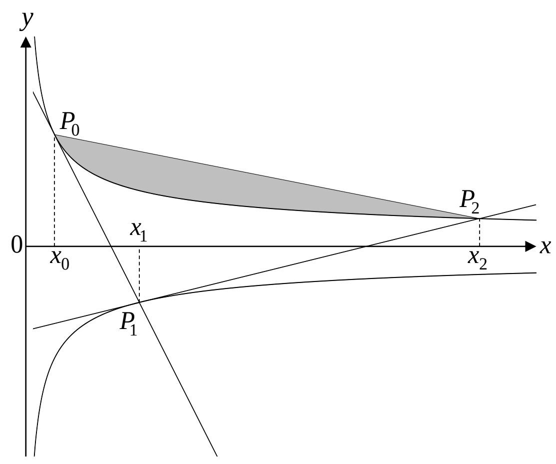
$$\therefore y_0\sqrt{x}=4 \quad \therefore x_1=\frac{16}{{y_0}^2},\ y_1=-\frac{y_0}{2} \quad \therefore P_1\left(\frac{16}{{y_0}^2},\ -\frac{y_0}{2}\right)$$ ……(答)

同様に $\therefore x_2=\dfrac{16}{{y_1}^2}=\dfrac{64}{{y_0}^2},\ y_2=-\dfrac{y_1}{2}=\dfrac{y_0}{4} \quad \therefore P_2\left(\dfrac{64}{{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{4}\right)$ ……(答)

(2)

$\overrightarrow{P_1P_0}=\left(-\dfrac{12}{{y_0}^2},\ \dfrac{3}{2}y_0\right),\ \overrightarrow{P_1P_2}=\left(\dfrac{48}{{y_0}^2},\ \dfrac{3}{4}y_0\right)$ より

$$T=\frac{1}{2}\left|-\frac{12}{{y_0}^2}\cdot\frac{3}{4}y_0-\frac{3}{2}y_0\cdot\frac{48}{{y_0}^2}\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{9}{y_0}-\frac{72}{y_0}\right|=\frac{81}{2y_0}$$



図の網掛部の面積を U とすると、 $S=T-U$ であるから

$$U=\frac{1}{2}(x_2-x_0)(y_2+y_0)-\int_{x_0}^{x_2}\frac{2}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{{y_0}^2}-\frac{4}{{y_0}^2}\right)\left(\frac{y_0}{4}+y_0\right)-4\Big[\sqrt{x}\Big]_{\frac{4}{{y_0}^2}}^{\frac{64}{{y_0}^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{60}{{y_0}^2}\cdot\frac{5y_0}{4}-4\left(\frac{8}{y_0}-\frac{2}{y_0}\right)=\frac{75}{2y_0}-\frac{24}{y_0}=\frac{27}{2y_0}$$

したがって $S=T-U=\dfrac{81}{2y_0}-\dfrac{27}{2y_0}=\dfrac{54}{2y_0} \quad \therefore \dfrac{T}{S}=\dfrac{3}{2}$ ……(答)

(3)

$\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0$ より

$$-\frac{12}{{y_0}^2}\cdot\frac{48}{{y_0}^2}+\frac{3}{2}y_0\cdot\frac{3}{4}y_0=-\frac{2^63^2}{{y_0}^4}+\frac{3^2}{2^3}{y_0}^2=0 \qquad {y_0}^6=2^9 \qquad \therefore y_0=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots (答)$$

(4)

$P_0\left(\frac{1}{2},\ 2\sqrt{2}\right),\ P_2\left(8,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であり、外接円の直径は P_0P_2 に一致するから

$$P_0P_2=\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{225}{4}+\frac{18}{4}}=\frac{\sqrt{243}}{2}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

外接円の半径は $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ であるから、面積は　$\therefore \pi\left(\frac{9}{4}\sqrt{3}\right)^2=\frac{243}{16}\pi$ ……(答)