2007年東大理後期$\boxed{2}$

(1)

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ b(a+c) & ac-b^2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a(a^2+b^2)+b^2(a+c) & b(ac-b^2) \\ -b(a^2+b^2)+ab(a+c) & a(ac-b^2) \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^3+2ab^2+b^2c & abc-b^3 \\ abc-b^3 & a^2c-ab^2 \end{pmatrix}$$

したがって、$B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$の形であり、

$$r+t=\frac{a^3+ab^2+a^2c+b^2c}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a+c)}{a^2+b^2}=a+c$$

$$rt-s^2=\frac{(a^3+2ab^2+b^2c)(a^2c-ab^2)-(abc-b^3)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^5c+2a^3b^2c+a^2b^2c^2-a^4b^2-2a^2b^4-ab^4c-a^2b^2c^2+2ab^4c-b^6}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^5c+2a^3b^2c-a^4b^2-2a^2b^4+ab^4c-b^6}{(a^2+b^2)^2}=\frac{ac(a^4+2a^2b^2+b^4)-b^2(a^4+2a^2b^2+b^4)}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2(ac-b^2)}{(a^2+b^2)^2}=ac-b^2$$

$\therefore r+t=a+c,\ rt-s^2=ac-b^2$ ……(答)

(2)

(解答1)　(1)の利用

(1)の結果からtを消去すると

$$rt-s^2=r(a+c-r)-s^2=r(a+c)-(r^2+s^2)=ac-b^2 \qquad r^2+s^2=r(a+c)-ac+b^2$$

$$r^2+s^2-(a^2+b^2)=r(a+c)-ac-a^2=\frac{(a^3+2ab^2+b^2c)(a+c)-(a^2+b^2)(a^2+ac)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^4+2a^2b^2+ab^2c+a^3c+2ab^2c+b^2c^2-(a^4+a^3c+a^2b^2+ab^2c)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2b^2+2ab^2c+b^2c^2}{a^2+b^2}=\frac{b^2(a+c)^2}{a^2+b^2}\geqq 0$$

$\therefore r^2+s^2\geqq a^2+b^2$ （証明終）

等号は、$b=0$または$a+c=0$のとき成立。

（解答 2）　強行突破

$$r^2+s^2=\frac{(a^3+2ab^2+b^2c)^2+(abc-b^3)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^6+4a^2b^4+b^4c^2+4a^4b^2+4ab^4c+2a^3b^2c+a^2b^2c^2-2ab^4c+b^6}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^6+4a^2b^4+b^4c^2+4a^4b^2+2ab^4c+2a^3b^2c+a^2b^2c^2+b^6}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{b^2(a^2+b^2)c^2+2ab^2(a^2+b^2)c+4a^2b^2(a^2+b^2)+a^6+b^6}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{b^2c^2+2ab^2c+4a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{(a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}=a^2+b^2+\frac{b^2c^2+2ab^2c+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$=a^2+b^2+\frac{b^2(a+c)^2}{a^2+b^2}\geqq a^2+b^2$$

$\therefore r^2+s^2\geqq a^2+b^2$ （証明終）

等号は、$b=0$ または $a+c=0$ のとき成立。

(3)

(1) より、$a_n+c_n,\ a_nc_n-b_n{}^2$ は n に関わらず一定であるから、$a_0=b_0=1,\ c_0=2$ より

$a_n+c_n=3$ ——①　$a_nc_n-b_n{}^2=1$ ——②

(2) より、$a_n{}^2+b_n{}^2\geqq a_{n-1}{}^2+b_{n-1}{}^2$ であるから、n が増加すると $a_n{}^2+b_n{}^2$ は増加するので、

$a_n{}^2+b_n{}^2\geqq 2$ ——③

(ア)

$b_n=\dfrac{b_{n-1}(a_{n-1}c_{n-1}-b_{n-1}{}^2)}{a_{n-1}{}^2+b_{n-1}{}^2}=\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}{}^2+b_{n-1}{}^2}\leqq\dfrac{1}{2}b_{n-1}$ より

$b_n\leqq\dfrac{1}{2}b_{n-1}\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^2b_{n-2}\leqq\cdots\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^nb_0=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　$\therefore b_n\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$b_n=\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}{}^2+b_{n-1}{}^2}$ より、$b_{n-1}>0$ であれば $b_n>0$。$b_0=1$ より、帰納的に $n\geqq 0$ について $b_n>0$ がわかる。

したがって、$0<b_n\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ であるから、はさみうちの原理より　$\therefore\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$ （証明終）

(イ)

①、②より $a_n+c_n=3,\ a_nc_n=b_n{}^2+1$ であり、$a_n,\ c_n$ は 2 次方程式 $x^2-3x+b_n{}^2+1=0$ の 2 解。

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4(b_n{}^2+1)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4b_n{}^2}}{2}$　ここで、$b_0=1$ であり、$a_0=2,\ c_0=1$ より

$\therefore a_n=\dfrac{3+\sqrt{5-4b_n{}^2}}{2},\ c_n=\dfrac{3-\sqrt{5-4b_n{}^2}}{2}$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$ より　$\therefore\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \lim_{n\to\infty}c_n=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　……(答)