2007 年東大理 $\boxed{1}$

（解答 1）　数学的帰納法

k に関する数学的帰納法で示す。

$P(x)=f(x)+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ とする。ここで、 $f(x)$ は、 $P(x)$ の $n+1$ 次以上の項の和を表す。

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned}(x+1)P(x)&=(x+1)f(x)+(x+1)(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)\\&=(x+1)f(x)+a_nx^{n+1}+(a_n+a_{n-1})x^n+(a_{n-1}+a_{n-2})x^{n-1}+\cdots+(a_1+a_0)x+a_0\end{aligned}$$

n 次以下の係数 $a_n+a_{n-1},\ a_{n-1}+a_{n-2},\ \cdots,\ a_1+a_0,\ a_0$ が、すべて整数であるとする。

0 次の係数 a_0 は整数である。1 次の係数 a_1+a_0 は整数であるから、 a_1 は整数である。

以下、順次、 a_n まで整数であることがわかるから、 $k=1$ のとき成立。

$k=m$ のとき

$(x+1)^mP(x)$ の n 次以下の係数がすべて整数ならば、 $P(x)$ の n 次以下の係数がすべて整数であると仮定する。

$(x+1)^mP(x)=g(x)+b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ とする。ここで、 $g(x)$ は、 $(x+1)^mP(x)$ の $n+1$ 次以上の項の和を表す。

$$\begin{aligned}(x+1)^{m+1}P(x)&=(x+1)g(x)+(x+1)(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)\\&=(x+1)g(x)+b_nx^{n+1}+(b_n+b_{n-1})x^n+(b_{n-1}+b_{n-2})x^{n-1}+\cdots+(b_1+b_0)x+b_0\end{aligned}$$

n 次以下の係数 $b_n+b_{n-1},\ b_{n-1}+b_{n-2},\ \cdots,\ b_1+b_0,\ b_0$ が、すべて整数であるとする。

0 次の係数 b_0 は整数である。1 次の係数 b_1+b_0 は整数であるから、 b_1 は整数である。

以下、順次、 b_n まで整数であることがわかる。

すると、帰納法の仮定により、 $P(x)$ の n 次以下の係数はすべて整数である。

したがって、 $k=m+1$ でも成立。以上により示された。（証明終）

（解答 2）　係数比較で押し切る

$P(x)=f(x)+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ とする。 $f(x)$ は $P(x)$ の $n+1$ 次以上の項の和を表す。

$(x+1)^k={}_kC_kx^k+{}_kC_{k-1}x^{k-1}+\cdots+{}_kC_1x+{}_kC_0=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}{}_kC_ix^i$ である。

$(x+1)^kP(x)$ の n 次以下の係数 $b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_n$ は、すべて整数であるとする。

m 次の係数は、 $(x+1)^k$ と $P(x)$ の項の積の次数が m 次になるものについて、すべての係数の積の和をとったものに等しい。また、 $(x+1)^k$ と $P(x)$ の $n+1$ 次以上の項は、 $(x+1)^kP(x)$ の n 次以下の項に関係しないから

$k<n$のとき

0次　${}_kC_0a_0=b_0$　$\therefore a_0=b_0$

1次　${}_kC_1a_0+{}_kC_0a_1=b_1$　$\therefore a_1=b_1-{}_kC_1a_0$

2次　${}_kC_2a_0+{}_kC_1a_1+{}_kC_0a_2=b_2$　$\therefore a_2=b_2-{}_kC_2a_0-{}_kC_1a_1$

$\vdots$

k次　${}_kC_ka_0+{}_kC_{k-1}a_1+\cdots+{}_kC_1a_{k-1}+{}_kC_0a_k=b_k$　$\therefore a_k=b_k-{}_kC_ka_0-{}_kC_{k-1}a_1-\cdots-{}_kC_1a_{k-1}$

$k+1$次　${}_kC_ka_1+{}_kC_{k-1}a_2+\cdots+{}_kC_1a_k+{}_kC_0a_{k+1}=b_{k+1}$　$\therefore a_{k+1}=b_{k+1}-{}_kC_ka_1-{}_kC_{k-1}a_2-\cdots-{}_kC_1a_k$

$\vdots$

n次　${}_kC_ka_{n-k}+{}_kC_{k-1}a_{n-k+1}+\cdots+{}_kC_1a_{n-1}+{}_kC_0a_n=b_n$　$\therefore a_n=b_n-{}_kC_ka_{n-k}-{}_kC_{k-1}a_{n-k+1}-\cdots-{}_kC_1a_{n-1}$

$k\geqq n$のとき

0次　${}_kC_0a_0=b_0$　$\therefore a_0=b_0$

1次　${}_kC_1a_0+{}_kC_0a_1=b_1$　$\therefore a_1=b_1-{}_kC_1a_0$

2次　${}_kC_2a_0+{}_kC_1a_1+{}_kC_0a_2=b_2$　$\therefore a_2=b_2-{}_kC_2a_0-{}_kC_1a_1$

$\vdots$

n次　${}_kC_na_0+{}_kC_{n-1}a_1+\cdots+{}_kC_1a_{n-1}+{}_kC_0a_n=b_n$　$\therefore a_n=b_n-{}_kC_na_0-{}_kC_{n-1}a_1-\cdots-{}_kC_1a_{n-1}$

いずれにしても、a_0は整数であり、これよりa_1は整数であり、a_0, a_1は整数であるからa_2は整数であり、以下、順次、a_nまで整数であることがわかる。

以上により示された。（証明終）