2007 年東大理 $\boxed{2}$

条件①により、n 個の三角形△OP_0P_1、△OP_1P_2、…△$OP_{n-1}P_n$ は相似である。

相似比は $1+\dfrac{1}{n}$ であるから、a_k は初項 $a_1=P_0P_1$、公比 $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列である。

$$a_1{}^2=OP_0{}^2+OP_1{}^2-2OP_0\cdot OP_1\cos\frac{\pi}{n}=1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$
$$=2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{n^2}=4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore a_1=\sqrt{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$s_n=\sqrt{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n^2}}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}=\sqrt{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}$$
$$=n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}\sqrt{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{n^2}}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}\sqrt{4\left(1+\frac{1}{n}\right)n^2\sin^2\frac{\pi}{2n}+1}$$
$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}\sqrt{\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2+1}$$

$n\to\infty$ のとき、$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\to e$ であり、$\dfrac{\pi}{2n}\to 0$ より $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\to 1$ であるから

$$\therefore \lim_{n\to\infty}s_n=(e-1)\sqrt{\pi^2+1}\quad\cdots\cdots(答)$$