2007年東大理$\boxed{3}$

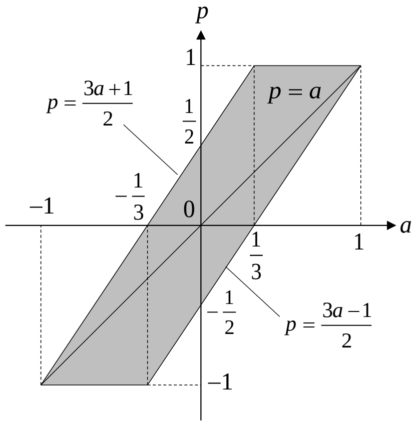
(1)

$-1 \leqq p \leqq 1,\ -1 \leqq q \leqq 1$ として、$P(p,\ p^2),\ Q(q,\ q^2)$ とする。

$R\left(\dfrac{2p+q}{3},\ \dfrac{2p^2+q^2}{3}\right)$ と表せるような点の存在範囲を考える。$a=\dfrac{2p+q}{3}, b=\dfrac{2p^2+q^2}{3}$ と置く。

q を消去すると　$b=\dfrac{2p^2+(3a-2p)^2}{3}=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$

a を固定したとき、b がとり得る範囲は、p がとり得る範囲によって定まる。



$p=\dfrac{3a-q}{2}$ であり、$-1 \leqq q \leqq 1$ から　$\therefore \dfrac{3a-1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3a+1}{2}$

これと $-1 \leqq p \leqq 1,\ -1 \leqq a \leqq 1$ より、$p,\ a$ の存在範囲は右図のようになる。

これより　$\therefore \begin{cases} -1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{3} \text{のとき} & -1 \leqq p \leqq \dfrac{3a+1}{2} \\ -\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{3} \text{のとき} & \dfrac{3a-1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3a+1}{2} \\ \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1 \text{のとき} & \dfrac{3a-1}{2} \leqq p \leqq 1 \end{cases}$ ——①

①の範囲で、$b=2(p-a)^2+a^2$ の最大値、最小値を考える。

b の最小値を与えるのはいずれの場合も $p=a$ のときで、$\therefore b \geqq a^2$

b の最大値を与えるのは、①の範囲の両端の値のうち、$p=a$ から遠い方であるから

$-1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき　$p=-1$ のとき最大で、$\therefore b \leqq 2(-1-a)^2+a^2=3a^2+4a+2$

$-\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 0$ のとき　$p=\dfrac{3a-1}{2}$ のとき最大で、$\therefore b \leqq 2\left(\dfrac{3a-1}{2}-a\right)^2+a^2=\dfrac{3}{2}a^2-a+\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$p=\dfrac{3a+1}{2}$ のとき最大で、$\therefore b \leqq 2\left(\dfrac{3a+1}{2}-a\right)^2+a^2=\dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき　$p=1$ のとき最大で、$\therefore b \leqq 2(1-a)^2+a^2=3a^2-4a+2$

以上により

$$\therefore \begin{cases} -1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{3} \text{のとき} & a^2 \leqq b \leqq 3a^2+4a+2 \\ -\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 0 \text{のとき} & a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2-a+\dfrac{1}{2} \\ 0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3} \text{のとき} & a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1 \text{のとき} & a^2 \leqq b \leqq 3a^2-4a+2 \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$3a^2 \pm 4a + 2 = 3\left(a \pm \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2}a^2 \pm a + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(a \pm \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

図示すると右の通り。

境界線を含む。