2007年東大理$\boxed{4}$

(1)

$A=aP+(a+1)Q$

①の両辺に左側からPをかけると　$PA=aP^2+(a+1)PQ=aP$

①両辺に左側からQをかけると　$QA=aQP+(a+1)Q^2=(a+1)Q$

辺々足すと　$\therefore (P+Q)A=aP+(a+1)Q=A$　（証明終）

(2)

(1)より　$\therefore (P+Q)A-A=(P+Q-E)A=O$

$A\neq O$より　$P+Q-E=O$　$\therefore P+Q=E$ ——①

また、$aP+(a+1)Q=A$ ——②　であり、

①×$(a+1)$ −②より　$\therefore P=(a+1)E-A=\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

②−①×aより　$\therefore Q=A-aE=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

これらは$P^2=P,\ Q^2=Q,\ PQ=QP=O$を満たす。　$\therefore P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ……(答)

(3)

$A_k=kP+(k+1)Q$より

$A_3A_2=(3P+4Q)(2P+3Q)=6P+12Q$　$A_4A_3A_2=(4P+5Q)(6P+12Q)=24P+60Q$

$A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2=n!P+\dfrac{(n+1)!}{2}Q$と予想されるので、数学的帰納法で示す。$n=2,3,4$のとき成立。

$n=k$のとき　$A_kA_{k-1}A_{k-2}\cdots A_2=k!P+\dfrac{(k+1)!}{2}Q$と仮定すると

$$A_{k+1}A_kA_{k-1}A_{k-2}\cdots A_2=\{(k+1)P+(k+2)Q\}\left\{k!P+\frac{(k+1)!}{2}Q\right\}=(k+1)!P+\frac{(k+2)!}{2}Q$$

したがって、$n=k+1$でも成立するので

$$\therefore A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2=n!\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\frac{(n+1)!}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n! & 0 \\ \dfrac{n-1}{2}\cdot n! & \dfrac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix}$$ ……(答)