2007年東大理$\boxed{5}$文$\boxed{4}$共通

(1)

$m=n$であれば、 $p_m=p^m$

$m<n$のとき

$n-m$回目に裏が出て、その後$n-m+1$回目からn回目まで、m回連続で表が出続ける。

$n-m-1$回目以前の経過には無関係であるから　$\therefore p_m=(1-p)p^m$

以上により　$m=n$のとき $p_m=p^m$、$m<n$のとき $p_m=(1-p)p^m$ ……(答)

(2)

$q_m=\sum_{k=0}^{m} p_k$ であるから

$m=n$のとき　$q_m=\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k+p^m=\frac{(1-p)(1-p^m)}{1-p}+p^m=1$

$m<n$のとき　$q_m=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k=\frac{(1-p)(1-p^{m+1})}{1-p}=1-p^{m+1}$

以上により　$m=n$のとき$q_m=1$、$m<n$のとき$q_m=1-p^{m+1}$ ……(答)

(3)

最後のブロックの高さが、1回目はmで2回目はm以下、1回目はm以下で2回目はmのいずれかである。

高さがm以下には高さmも含まれる。$r_m=2p_mq_m-{p_m}^2$であるから

$m=n$のとき　$r_m=2p^m-p^{2m}=p^m(2-p^m)$

$m<n$のとき

$r_m=2(1-p)p^m(1-p^{m+1})-(1-p)^2p^{2m}=(1-p)p^m\left\{2(1-p^{m+1})-(1-p)p^m\right\}=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})$

以上により　$m=n$のとき$r_m=p^m(2-p^m)$、$m<n$のとき$r_m=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})$ ……(答)

※(2)で、$m=n$のとき$q_m=1$は自明。