2007 年東大理 $\boxed{6}$

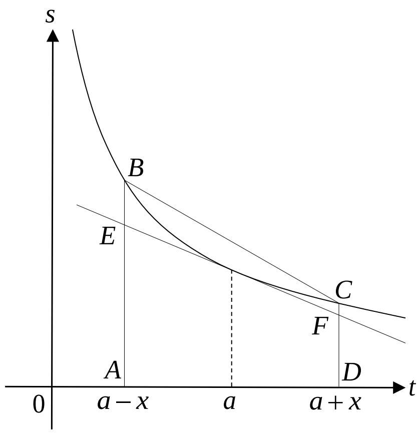
(1)

曲線 $s=\dfrac{1}{t}$ は下に凸であり、右図の台形 $ABCD$ の面積 S_2 は、

線分 $AB,\ CD,\ AD$ および $s=\dfrac{1}{t}$ で囲まれた部分の面積 S より大きい。

また、 $s=\dfrac{1}{t}$ 上の点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における接線 l を考え、線分 $AB,\ CD$ との

交点をそれぞれ $E,\ F$ とすると、台形 $AEFD$ の面積 S_1 は、S より小さい。



$$S_2=\frac{1}{2}\times 2x\times\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\qquad S=\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt$$

l を $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を中心に回転させれば、 $S_1=2x\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{2x}{a}$ は明らかである。

$S_1<S<S_2$ より　$\therefore \dfrac{2x}{a}<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$　（証明終）

(2)

(1) より　$\dfrac{2x}{a}<\log(a+x)-\log(a-x)<x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)$ ――①

$0<y<b$ とする。

①に $a=b-\dfrac{y}{2},\ x=\dfrac{y}{2}$ を代入すると　$\dfrac{y}{b-\frac{y}{2}}<\log b-\log(b-y)<\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b-y}\right)$ ――②

①に $a=b+\dfrac{y}{2},\ x=\dfrac{y}{2}$ を代入すると　$\dfrac{y}{b+\frac{y}{2}}<\log(b+y)-\log b<\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{b+y}+\dfrac{1}{b}\right)$ ――③

②＋③より

$$\frac{y}{b-\frac{y}{2}}+\frac{y}{b+\frac{y}{2}}<\log(b+y)-\log(b-y)<\frac{y}{2}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{b+y}+\frac{1}{b-y}\right)$$

$\dfrac{b}{y}=z$ とすると $z>1$ で、　$\dfrac{2}{2z-1}+\dfrac{2}{2z+1}<\log\dfrac{z+1}{z-1}<\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2z+2}+\dfrac{1}{2z-2}$ ――④

ここで、 $\dfrac{z+1}{z-1}=2$ を解くと $z=3$ であり、 $z>1$ を満たす。これを④の各辺に代入すると

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{7}<\log 2<\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\qquad \therefore \frac{24}{35}<\log 2<\frac{17}{24}$$

$\dfrac{24}{35}=0.685\cdots,\ \dfrac{17}{24}=0.708\cdots$ であるから　$\therefore 0.68<\log 2<0.71$　（証明終）

（注）

①において $\dfrac{a}{x}=z$ とすると　$\dfrac{2}{z}<\log\dfrac{z+1}{z-1}<\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{z-1}$

$\dfrac{z+1}{z-1}=2$ より $z=3$ を各辺に代入すると　$\dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}$　$\therefore \dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{2}{3}=0.666\cdots,\ \dfrac{3}{4}=0.75$ であるから、$0.68<\log 2<0.71$を示すことができない。