2008 年東大文$\boxed{3}$

$P(x,\ y)$ とする。 $\cos\angle APC=\cos\angle BPC$ であるから、余弦定理より

$$\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}=\frac{PB^2+PC^2-BC^2}{2PB\cdot PC} \qquad PB(PA^2+PC^2-AC^2)=PA(PB^2+PC^2-BC^2)$$

$AC=BC=\sqrt{2},\ PA=\sqrt{(x-1)^2+y^2},\ PB=\sqrt{(x+1)^2+y^2},\ PC=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$ であるから

$$\left\{(x+1)^2+y^2\right\}\left\{(x-1)^2+y^2+x^2+(y+1)^2-2\right\}^2=\left\{(x-1)^2+y^2\right\}\left\{(x+1)^2+y^2+x^2+(y+1)^2-2\right\}^2$$

$$(x^2+y^2+1+2x)(x^2+y^2+y-x)^2=(x^2+y^2+1-2x)(x^2+y^2+y+x)^2$$

$$(x^2+y^2+1)\left\{(x^2+y^2+y-x)^2-(x^2+y^2+y+x)^2\right\}+2x\left\{(x^2+y^2+y-x)^2+(x^2+y^2+y+x)^2\right\}=0$$

$$-(x^2+y^2+1)(x^2+y^2+y)x+x\left\{(x^2+y^2+y)^2+x^2\right\}=0$$

$$x\left\{(x^2+y^2)^2+2y(x^2+y^2)+x^2+y^2-(x^2+y^2)^2-(y+1)(x^2+y^2)-y\right\}=0$$

$$\therefore xy(x^2+y^2-1)=0$$

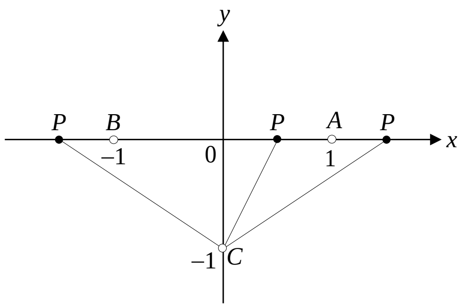
これより、 $x=0$ または $y=0$ または $x^2+y^2=1$ である。

$x=0$ のとき　$P\neq C$ であれば、$\angle APC=\angle BPC$ は明らかである。

$y=0$ のとき

$-1<x<1$ のとき、$\angle APC=\angle BPC$ となるのは $x=0$ のときのみ。

$x<-1,\ 1<x$ であれば、図より $\angle APC=\angle BPC$ は明らかである。

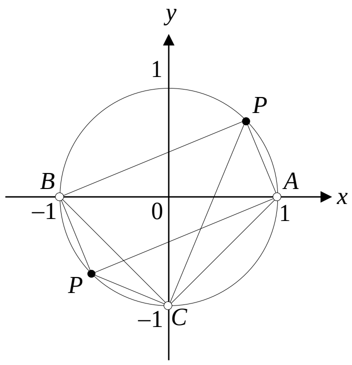


$x^2+y^2=1$ のとき

$y>0$ であれば、円周角の定理より $\angle APC=\angle BPC=\dfrac{\pi}{4}$ が成り立つ。

$y<0,\ 0<x<1$ のとき　$\angle APC=\dfrac{3}{4}\pi,\ \angle BPC=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

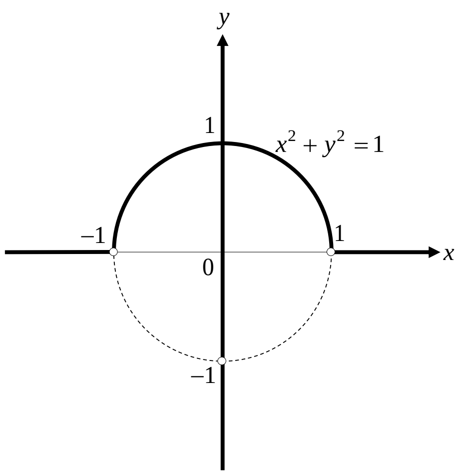
$y<0,\ -1<x<0$ のとき　$\angle APC=\dfrac{\pi}{4},\ \angle BPC=\dfrac{3}{4}\pi$ となる。



以上により、P の軌跡は

$\therefore x=0\,(y\neq -1),\ y=0\,(x<-1,\ 1<x),\ x^2+y^2=1\,(y>0)$ ……（答）

図示すると右図の太線部の通り。



※図形的に考えてもよいが、計算ごり押しが最も無難では。