2008年東大理$\boxed{1}$

(1)

移動 f は、行列$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$による一次変換を表す。

今、$b_n \neq 0$ として、l_n 上の任意の点$\left(t,\ \dfrac{1-a_n t}{b_n}\right)$が f によって移る点を考えると

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \dfrac{1-a_n t}{b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + \dfrac{1-a_n t}{b_n} \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(3 - \dfrac{a_n}{b_n}\right)t + \dfrac{1}{b_n} \\ -2t \end{pmatrix}$$

これが l_{n+1} 上の点であるから

$$a_{n+1}\left\{\left(3 - \frac{a_n}{b_n}\right)t + \frac{1}{b_n}\right\} - 2b_{n+1}t = 1 \qquad \left\{a_{n+1}\left(3 - \frac{a_n}{b_n}\right) - 2b_{n+1}\right\}t + \left(\frac{a_{n+1}}{b_n} - 1\right) = 0$$

$$\{a_{n+1}(3b_n - a_n) - 2b_n b_{n+1}\}t + (a_{n+1} - b_n) = 0$$

任意の t について成立するには　$a_{n+1}(3b_n - a_n) - 2b_n b_{n+1} = 0$ ——① 　$a_{n+1} - b_n = 0$ ——②

②より　$\therefore a_{n+1} = b_n$　①に代入すると　$b_n(3b_n - a_n - 2b_{n+1}) = 0$

$b_n \neq 0$ より　$3b_n - a_n - 2b_{n+1} = 0$　$\therefore b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{3}{2}b_n$

以上により、$b_n \neq 0$ の条件下で　$\therefore a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{3}{2}b_n$ ……(答)

(2)

(1)で求めた関係式より　$a_{n+2} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{3}{2}a_{n+1}$　$a_{n+2} - \dfrac{1}{2}a_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n$

これより、$a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n$ は一定である。$a_0 = 3,\ b_0 = 2$ より、$a_1 = 2$ であるから

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_1 - \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1) \qquad a_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\ (n \geqq 0)$$

したがって$b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1\ (n \geqq 0)$ であるから、確かに$b_n \neq 0$ である。

ここで、$-a_n + 2b_n = 1$であるから、l_n は定点$(-1,\ 2)$を通る。

l_n は$\left(\dfrac{1}{a_n},\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{b_n}\right)$を通り、$\dfrac{1}{a_n},\ \dfrac{1}{b_n}$ は単調増加である。

$n \to \infty$ のとき、$\dfrac{1}{a_n} \to 1,\ \dfrac{1}{b_n} \to 1$であり、$l_n$ は$x + y = 1$に近づく。

領域 D_n は、l_n を境界線に原点を含まない側を表すので、

求める範囲は右図の通り。

境界線は実線部のみ含み、点$(-1,\ 2)$は含まない。