2008年東大理$\boxed{4}$

(1)

$P(p,\ p^2),\ Q(q,\ q^2)\ (p<q)$ とすると

$$m=\frac{q^2-p^2}{q-p}=q+p \qquad L^2=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=(q-p)^2\left\{1+(q+p)^2\right\}$$

$$(q-p)^2=(q+p)^2-4pq=m^2-4pq=\frac{L^2}{1+m^2} \qquad \therefore pq=\frac{1}{4}\left(m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right)$$

$h=\dfrac{q^2+p^2}{2}=\dfrac{(q+p)^2-2pq}{2}$ であるから

$$\therefore h=\frac{m^2}{2}-\frac{1}{4}\left(m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right)=\frac{1}{4}\left(m^2+\frac{L^2}{1+m^2}\right) \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

$f(m)=m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}$ とすると

$$f'(m)=2m-L^2\cdot\frac{2m}{(1+m^2)^2}=\frac{2m\left\{(1+m^2)^2-L^2\right\}}{(1+m^2)^2}=\frac{2m(1+m^2+L)(1+m^2-L)}{(1+m^2)^2}$$

$L\leqq 1$ のとき　$1+m^2-L\geqq m^2\geqq 0$

増減表より、$f(m)$ は $m=0$ のとき最小値 L^2 をとる。

m	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(m)$	$-$	0	$+$
$f(m)$	$\searrow$		$\nearrow$

$L>1$ のとき　$1+m^2-L=(m+\sqrt{L-1})(m-\sqrt{L-1})$

増減表より、$f(m)$ は $m=\pm\sqrt{L-1}$ のとき極小となる。

$$f(\pm\sqrt{L-1})=L-1+\frac{L^2}{(L-1)+1}=2L-1$$

m	$\cdots$	$-\sqrt{L-1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{L-1}$	$\cdots$
$f'(m)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(m)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

以上により、h の最小値は　$L\leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{4}L^2$、$L>1$ のとき $\dfrac{1}{2}L-\dfrac{1}{4}$ $\cdots\cdots$(答)

※1974年理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通とほぼ同じ。